



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Чернышев Антон Олегович

**Приложение метода снесения граничного условия  
к моделированию обтекания и формообразования  
планирующего парашюта вихревым методом**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**  
д.ф.-м.н., профессор  
А.В. Сегуха

Москва, 2016

## Оглавление

	страница
Введение.....	3
1. Общие положения.....	7
2. Метод вихревых рамок расчета обтекания купола парашюта.....	11
3. Метод вихревых рамок со снесением .....	20
4. Численная схема решения задачи со снесением.....	24
5. Расчет нагрузок.....	27
6. Совместный расчет обтекания и формообразования со снесением.....	32
7. Примеры расчетов.....	35
8. Сравнение с экспериментальными данными.....	48
Заключение.....	57
Список использованной литературы.....	59

## **Введение**

В данной работе рассматривается задача моделирования на ЭВМ процессов обтекания и формообразования двухоболочкового планирующего парашюта. В основе математической модели обтекания лежит панельный метод (метод "вихревых рамок"). Задача обтекания парашюта рассматривается в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости.

Актуальность разработки математических моделей аэродинамики планирующих парашютов вызвана тем обстоятельством, что на данный момент отсутствуют отработанные методики постановки эксперимента в аэродинамических трубах: существующие методики проведения аэродинамического эксперимента ориентированы на жесткие модели, воспроизводящие форму проектируемого самолета в некотором масштабе, которые можно закрепить в потоке в заданном положении. А в данном случае мы имеем дело с нежестким подвижным объектом. Это сильно осложняет эксперимент и не позволяет получить точного результата.

Для решения задач обтекания парашютов эффективны панельные методы, основанные на решении интегрального уравнения, записанного на поверхности купола парашюта. При этом при построении математических моделей для аэродинамического расчета парашюта проявляется следующая специфика данной задачи:

- форма купола, которую примет парашют в процессе полета, заранее неизвестна. Поэтому математическое моделирование является едва ли не единственным средством оптимизационного проектирования;

- при моделировании процесса обтекания планирующего парашюта необходимо одновременно решить и задачу формообразования: для получения аэродинамических показателей, близких к реальным данным, необходимо получить реалистичную геометрическую форму парашюта и его балансировочное положение относительно воздушного потока. Поэтому, в отличие от задач аэродинамики самолетов, огромную значимость представляют не только суммарные силы и моменты, действующие на

парашют, но и распределение перепада давления по поверхности купола. Данное распределение необходимо в дальнейшем при пересчете формы в рамках аэроупругой модели;

- между верхней и нижней поверхностью купола расстояние мало, эти поверхности сходятся под малым углом. Это приводит к большой погрешности в решении интегрального уравнения.

В ФГУП «НИИ Парашютостроения» был разработан комплекс программ для расчетов аэродинамических характеристик парашютов. Однако, при моделировании планирующих парашютов с помощью данного комплекса возникали проблемы. Дело в том, что поверхность двухоболочкового парашюта является большой по площади, что требует значительных сеток, которые сильно увеличивают вычислительную сложность. Плоскости парашюта на задней кромке сходятся под малым углом. Диаметр разбиения сетки сильно больше расстояния между плоскостями парашюта в окрестности задней кромки, из-за этого возникают серьезные ошибки. Численное решение панельным методом "вихревых рамок" вырождается.

В данной работе предлагается использовать модифицированный панельный метод "вихревых рамок" – со снесением граничного условия на срединную поверхность. Данный метод, применительно к трехмерным задачам, был разработан в диссертации [1]. Однако его тестирование, применительно к задачам аэродинамики крыльев, ограничилось задачей об обтекании прямоугольного крыла, в которой трехмерная специфика задачи мало проявляется.

В моей работе осуществлено приложение этого метода к задаче обтекания планирующего парашюта, где течение уже становится существенно трехмерным. Метод со снесением граничного условия позволяет сеткой по срединной поверхности учитывать при обтекании геометрическую форму исходного парашюта с помощью потенциалов двойного и простого слоя. Я решил использовать данную

модифицированную модель для моделирования обтекания и формообразования планирующего парашюта.

Целью данной работы явились: разработка математической модели и программы для проведения расчета на ЭВМ аэродинамических нагрузок и формообразования планирующего парашюта панельным методом со снесением граничного условия на срединную поверхность.

В данной работе разработан программный модуль, реализующий снесение условия на границе. С помощью данного модуля мы получаем распределение давлений и, подключив в существующий программный комплекс новый модуль, реализуем методику итерационного просчета формы по времени: через определенное количество итераций форма меняется, и, в зависимости от значения суммарных сил, занимает определенное положение.

В данной математической модели рассматривается трехмерная краевая задача Неймана для уравнения Лапласа, возникающая в линейной теории крыла конечного размаха в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Для получения численного решения задачи использовались методы, основанные на применении теории потенциалов и граничных интегральных уравнений. В результате, после снесения граничного условия на срединную поверхность, была получена система из двух двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Построена численная схема решения указанных уравнений, основанная на их дискретизации методом кусочно-постоянных аппроксимаций. Полученные таким образом плотности потенциалов простого и двойного слоя использовались для получения распределения давления и суммарных сил. Для пересчета формы в модифицированном программном комплексе использовалось распределение давления, для изменения положения парашюта в пространстве использовалось значение суммарных сил.

В настоящей работе реализовано:

- Подготовка геометрической модели и разработка алгоритма для преобразования геометрии планирующего парашюта для расчета со снесением граничного условия
- Программная реализация метода решения задачи об обтекании крыла конечного размаха со снесением граничного условия на срединную поверхность
- Внедрение модуля обтекания со снесением в существующий программный комплекс расчета аэродинамических характеристик парашютов
- Модификация имеющегося модуля итерационного расчета формообразования для применения алгоритма решения аэродинамической задачи со снесением граничного условия
- Тестирование и верификация результатов, сравнение с экспериментальными данными

## 1. Общие положения

Данная работа нацелена на совершенствование разработанных в ФГУП «НИИ Парашютостроения» методик расчета обтекания и формообразования планирующих парашютов. В рамках этих методик сначала производится построение математической модели конструкции парашюта, включающей задание исходной формы купола, структуры силового каркаса и свойств материалов конструкции парашюта.

Разработанные ранее в ФГУП «НИИ Парашютостроения» программные модули позволяют (см. [9]):

- осуществлять построение геометрической и упруго-массовой модели парашюта, в рамках которой формируется исходная форма купола;

- осуществлять моделирование на ЭВМ процесса обтекания планирующего парашюта с заданной формой купола при малых дозвуковых скоростях с учётом развития вихревого следа, и определение аэродинамической нагрузки и коэффициентов аэродинамических сил, и моментов, действующих на парашют;

- осуществлять моделирование на ЭВМ единого процесса обтекания и формообразования парашюта при малых дозвуковых скоростях с учётом развития вихревого следа и определением напряжённно-деформированного состояния парашюта, а также вычислением аэродинамической нагрузки и коэффициентов аэродинамических сил и моментов, действующих на парашют.

Для математического моделирования обтекания купола парашюта воздушным потоком используется метод вихревых рамок, который является модификацией известного метода дискретных вихрей [10-11]. Этот метод является одной из разновидностей панельных методов, хорошо зарекомендовавших себя для расчета аэродинамических характеристик крыльев при малых углах атаки.

Задача решается в нестационарной постановке в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что неподвижный парашют находится в потоке несжимаемой жидкости, имеющем заданную скорость на бесконечности  $w_\infty$ .

В методе вихревых рамок поверхности обтекаемых тел и вихревой след, образующийся за ними, заменяются вихревыми слоями (т.е. поверхностями, на которых имеется разрыв касательной составляющей скорости жидкости). Предполагается, что течение воздуха является потенциальным вне вихревого следа, возникающего при отрыве потока с заданной линии отрыва. На поверхности парашюта ставится условие отсутствия потока жидкости через поверхность, записываемое как равенство нулю нормальной к поверхности компоненты скорости. Заметим, что поверхность обтекаемого парашюта может предполагаться также и проницаемой. В этом случае на ней ставится условие, связывающее нормальную скорость жидкости сквозь поверхность с перепадом давления.

В аэродинамическом расчете планирующий парашют моделируется поверхностью, которая состоит из верхней и нижней поверхностей купола, а также нервюр и, возможно, косынок. При этом суммарная поверхность купола есть разомкнутая поверхность с краем: разомкнутость поверхности купола вызвана наличием воздухозаборников, необходимых для наполнения парашюта. При этом в данной задаче возникает ряд специфических особенностей, которые следует учитывать при построении математической модели расчета обтекания.

Начать надо с того, что при расчете обтекания планирующего парашюта, в отличие от задач аэродинамики крыльев самолетов, значительный интерес представляют не только суммарные силы и моменты, но и распределение перепада давления по поверхности купола парашюта. Это необходимо для дальнейшего расчета его формы в рамках аэроупругой модели.



Далее, суммарная форма поверхности купола включает в себя верхнюю и нижнюю поверхности, расположенные на малом расстоянии друг от друга. Для учета граничного условия на поверхности парашюта на каждом шаге интегрирования по времени решается система линейных алгебраических уравнений относительно циркуляций вихревых рамок, аппроксимирующих поверхность купола. Эта система линейных уравнений аппроксимирует граничное интегральное уравнение, записанное на поверхности купола, причем, при стремлении верхней и нижней поверхностей купола или некоторых их участков друг к другу в пределе данное уравнение вырождается. Поэтому, в расчетах приходится использовать очень мелкое разбиение поверхности так, чтобы размер ячеек был много меньше среднего расстояния между верхней и нижней поверхностями купола. Правда, надо сказать, что в данном случае это требование не очень принципиально с точки зрения повышения размерности задачи, т.к. для планирующего парашюта и так приходится использовать очень мелкие разбиения, что вызвано необходимостью правильно отразить его форму и конструкцию.

Однако, кроме близости верхней и нижней поверхностей, большую проблему представляет тот факт, что они стыкуются на задней кромке под малым углом. Это приводит к локальным неточностям при расчете распределения давления вблизи задней кромки. Проблема расчета давления вблизи задней острой кромки телесного крыла в панельных методах известна давно. При этом если говорить о задачах аэродинамики классических телесных крыльев, то, с одной стороны, в панельных методах существуют приемы для повышения точности расчета давления в окрестности задней кромки за счет применения специальных интегральных представлений. С другой стороны, как уже отмечалось, погрешность в вычислении давления является локальной и не приводит к существенным ошибкам в расчете суммарных сил. В задаче об обтекании двухоболочкового планирующего парашюта, с одной стороны, указанные интегральные представления поля скоростей не применимы (по крайней мере, напрямую), так как они основаны

на замкнутости поверхности крыла. С другой стороны, локальные погрешности в расчете распределения давления вблизи задней кромки приводят к ее неестественному подгибанию при расчете формы купола на основе этого распределения давления с локальной погрешностью. А в результате, при одновременном расчете обтекания и формообразования, возникает существенная погрешность уже в расчете суммарных сил и моментов.

Описанная проблема неправильного расчета локального распределения перепада давления проявляется и в других местах поверхности купола - там, где происходит сильная деформация расчетной сетки разбиения поверхностей. Например, вблизи мест крепления строп.

Отдельно заметим, что проблема близости верхней и нижней оболочек купола парашюта обостряется и становится критической при имитации подтяга строп управления. При этом поверхность купола деформируется и наблюдается локальное слипание верхней и нижней его поверхностей вблизи мест крепления строп управления. При применении панельного метода это приводит к полному развалу решения задачи обтекания.

Для преодоления отмеченных недостатков в дипломной работе разработан вариант указанной математической модели обтекания купола парашюта со снесением граничного условия на срединную поверхность. Идея такого подхода заимствована из метода снесения граничного условия в плоских задачах об обтекании профилей крыльев, разработанного и обоснованного математически в работах Молякова Н.М., Лифанова И.К., Матвеева А.Ф. [12-13], [14, с. 128]. В указанных работах подход, разработанный для плоских течений, применялся и в трехмерных задачах об обтекании крыльев большого размаха с привлечением гипотезы плоских сечений. Однако задача об обтекании купола планирующего парашюта является существенно трехмерной. Это связано как с наличием арочности купола, так и с наличием воланов. В работе [23] идея снесения граничного условия на срединную поверхность была распространена на трехмерные

задачи обтекания тел малой толщины и протестирована на примере задачи об обтекании телесного крыла конечного размаха.

В настоящей работе осуществлено приложение математической модели, разработанной в статье [23], к задаче обтекания планирующего парашюта. При этом, во-первых, реализован метод расчета обтекания купола планирующего парашюта заданной формы со снесением граничного условия на срединную поверхность. Во-вторых, реализован алгоритм перенесения аэродинамических нагрузок, рассчитанных на срединной поверхности, для использования при уточнении формы купола парашюта. В результате разработана модель единого расчета обтекания и формообразования парашюта (с итерационным уточнением формы в процессе аэродинамического расчета), в которой при расчете обтекания осуществляется снесение граничного условия на срединную поверхность.

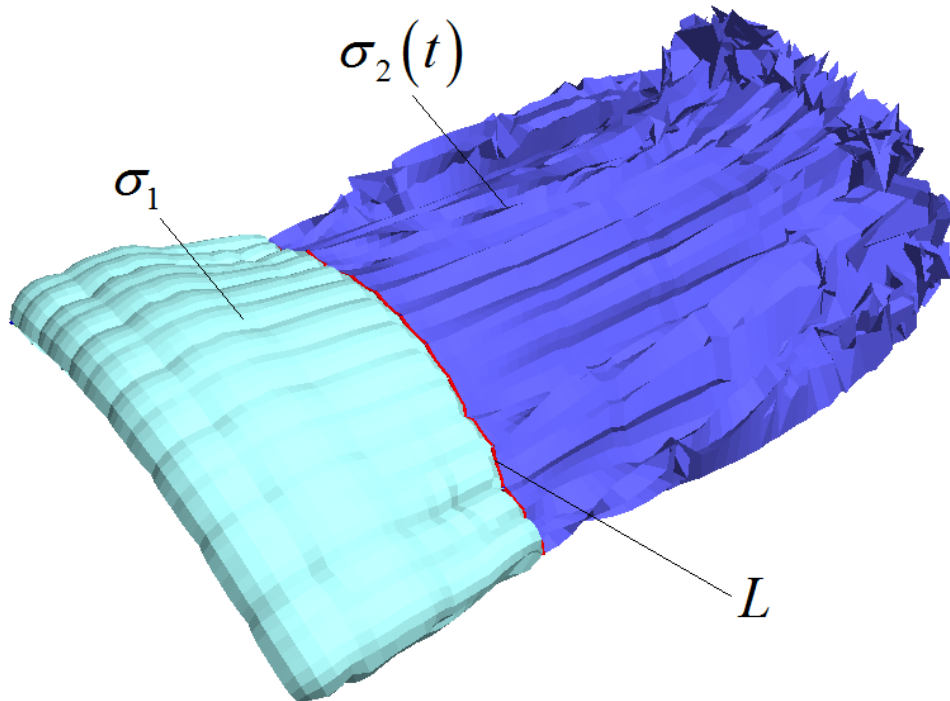
## **2. Метод вихревых рамок расчета обтекания купола парашюта**

Опишем исходную математическую модель обтекания купола планирующего парашюта воздушным потоком методом "вихревых рамок". Ниже излагаются постановка задачи и метод ее решения в вариантах, взятых из статьи [15].

Задача решается в нестационарной постановке в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Ищутся потенциальное поле скоростей  $\mathbf{w}$  и поле давлений  $p$ , определенные вне поверхности купола парашюта и поверхности, моделирующей вихревой след. Поверхность, моделирующая вихревой след, является подвижной и ее закон движения заранее неизвестен.

Пусть поверхность купола парашюта образует заданную кусочно-гладкую разомкнутую поверхность  $\sigma_1$ , которая в данном случае включает в себя верхнюю и нижнюю несущие поверхности, боковые и внутренние нервюры, косынки. В данной работе будем считать, что поверхность  $\sigma_1$  является непроницаемой. Предполагается, что в каждый момент времени  $t$  вихревой след образует неизвестную кусочно-гладкую разомкнутую

поверхность  $\sigma_2(t)$ , которая пересекается поверхностью с поверхностью купола парашюта по заданной линии отрыва потока  $L$ . При этом должно выполняться соотношение  $\sigma_1 \cap \sigma_2(t) = L$  (см. рис.1).



Р и с у н о к 1 – Моделирование поверхности купола парашюта и вихревой пелены

Пусть  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\infty + \text{grad} u$ , где  $u$  - потенциал возмущенного поля скоростей. В силу уравнения неразрывности, которое для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\text{div} \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

всюду вне вихревых следов для потенциала  $u$  должно выполняться уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad U = U(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  - точки пространства,  $t$  - время.

На поверхности купола парашюта  $\sigma_1$  ставится условие отсутствия потока жидкости через эту поверхность, которое можно записать как условие

равенства нулю нормальной компоненты скорости жидкости на этой поверхности в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{w}_\infty, \mathbf{n}) \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  - нормаль к поверхности  $\sigma_1$ . Условие (3) должно выполняться в каждой точке поверхности  $\sigma_1$  на обеих ее сторонах.

На свободной вихревой пелене  $\sigma_2(t)$  в каждый момент времени выполняются условия равенства давлений

$$p^+ = p^- \quad (4)$$

и условие отсутствия потока жидкости через вихревую пелену

$$(\mathbf{w}_\infty, \mathbf{n}) + \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{w}_\infty, \mathbf{n}) + \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} = D_n, \quad (5)$$

где  $D_n$  - нормальная скорость перемещения точек вихревой пелены (здесь  $\mathbf{n}$  - вектор нормали к  $\sigma_2(t)$ ). Индексы "+" и "-" обозначают краевые значения рассматриваемых функций в точках поверхности со стороны вектора нормали и с противоположной стороны, соответственно.

Кроме этого ставится условие затухания скорости на бесконечности

$$p \rightarrow p_\infty, |\nabla u| \rightarrow 0, \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где  $p_\infty$  и  $\mathbf{w}_\infty$  - давление и скорость невозмущенного воздушного потока на бесконечности, и условие Чаплыгина-Жуковского ограниченности скорости в окрестности любой точки линии отрыва  $L$ .

При решении задачи (2)-(6) потенциал  $u(\mathbf{x}, t)$  ищется в виде:

$$u(\mathbf{x}, t) = u_1(\mathbf{x}, t) + u_2(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$u_i, i = 1, 2$  - потенциалы двойного слоя:

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) g_i(\mathbf{y}, t) d\sigma_y, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где  $g_i(\mathbf{x}, t)$  - плотность потенциала двойного слоя, размещенного на поверхности  $\sigma_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}$  - производная по направлению вектора  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ , вычисляемая по координатам точки  $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ .

При этом поле скоростей ищется в виде суммы скорости невозмущенного потока на бесконечности и градиентов потенциалов двойного слоя с неизвестными плотностями  $g_i(\mathbf{y}, t)$ ,  $\mathbf{y} \in \sigma_i$ ,  $i=1, 2$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_\infty + \sum_{i=1,2} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \nabla_x \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \right) g_i(\mathbf{y}, t) d\sigma_y \quad (9)$$

Если поверхности  $\sigma_i$  и функции  $g_i(\mathbf{y}, t)$  являются достаточно гладкими, то подынтегральная функция в правой части формулы (9) представляется в каждый момент времени  $t$  в виде  $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$ , где  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ - векторная функция,

гладкая в окрестности точки  $\mathbf{x}$ . Выражение (9) определено и на поверхностях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2(t)$ , если входящие в него интегралы понимать как гиперсингулярные в смысле конечного значения по Адамару [6].

Интеграл в смысле конечного значения по Адамару, вычисляемый по области  $\Sigma$ , лежащей на плоскости, определяется как

$$\int_{\Sigma} \frac{\nu(\mathbf{y}) d\sigma_y}{r^3} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Sigma_\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\nu(\mathbf{y}) d\sigma_y}{r^3} - \frac{2\pi\nu(\mathbf{x})}{\varepsilon} \right\}, \quad x \in \Sigma, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где  $\Sigma_\varepsilon(\mathbf{x})$  - множество точек  $\mathbf{y} \in \Sigma$ , отстоящих от точки  $\mathbf{x}$  на расстояние большее чем  $\varepsilon$ . Записанный интеграл существует, если функция  $\nu$  и её поверхностный градиент удовлетворяют условию Гельдера.

При этом в каждой точке  $x \in \sigma_i$ ,  $i=1, 2$ , справедливы соотношения:

$$u^+ - u^- = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-), \quad \mathbf{w}_n^\pm = \mathbf{w}_n$$

где  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  - прямое значение функции  $\mathbf{w}$  в точке  $\mathbf{x}$ , получаемое непосредственно из выражения (9),  $u^\pm \equiv u^\pm(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{w}^\pm \equiv \mathbf{w}^\pm(\mathbf{x}, t)$  - предельные

значения функций  $u$  и  $\mathbf{w}$  в точке  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{w}_n^\pm \equiv \mathbf{w}_n^\pm(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{w}_n \equiv \mathbf{w}_n(\mathbf{x}, t)$  - нормальные составляющие векторов  $\mathbf{w}^\pm(x, t)$  и  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  соответственно [6].

Для удовлетворения граничных условий на поверхности вихревого следа  $\sigma_2(t)$ , предполагается, что эта поверхность состоит из точек, движущихся вместе с жидкостью, и плотность потенциала двойного слоя  $g_2(\mathbf{x}, t)$  в каждой такой точке не меняется с течением времени [9]. Пусть в каждый момент  $\tau \leq t$  с каждой точки  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{otr}(s)$  кривой  $L$  (суммарной линии отрыва), где  $s$  - длина дуги на  $L$ , сходит в поток частица жидкости, которая в момент времени  $t$  занимает положение  $\mathbf{x}(s, \tau, t)$ , и что в каждый момент времени  $t$  совокупность всех точек  $\mathbf{x}(s, \tau, t)$  образует поверхность вихревого следа  $\sigma_2(t)$  (см. рисунок 1). Тогда для поверхности  $\sigma_2(t)$  возникают следующие уравнение движения и начальные условия:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(s, \tau, t)}{\partial t} = \mathbf{w}(\mathbf{x}(s, \tau, t), t), \quad \tau \leq t, \quad s: \mathbf{x}_{otr}(s) \in L \quad (10)$$

$$\mathbf{x}(s, \tau, t)|_{t=\tau} = \mathbf{x}_{otr}(s), \quad (11)$$

а для функции  $g_2(x, t)$  справедливо соотношение:

$$g_2(\mathbf{x}(s, \tau, t), t) \equiv g_2(s, \tau), \quad \tau \leq t, \quad s: \mathbf{x}_{otr}(s) \in L. \quad (12)$$

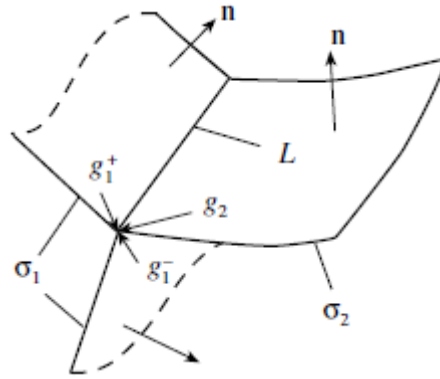
Кроме того, в постановку задачи входит интегральное уравнение, выражающее условие равенства нулю нормальной составляющей поля скоростей на поверхности обтекаемых объектов. Это уравнение можно записать как уравнение относительно неизвестной плотности потенциала двойного слоя  $g_1(\mathbf{y}, t)$ , размещенного на поверхности купола парашюта, связывающее ее с плотностью потенциала двойного слоя  $g_2(\mathbf{y}, t)$ , размещенного на поверхности вихревого следа и формой этого вихревого следа в каждый момент времени  $t$  :

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\sigma_1} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \right) g_1(\mathbf{y}, t) d\sigma_y = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}_x - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\sigma_2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \right) g_2(\mathbf{y}, t) d\sigma_y \quad (13)$$

Где  $\mathbf{x} \in \sigma_1$  и  $\mathbf{n}_x$  - орт вектора нормали к поверхности  $\sigma_1$  в точке  $\mathbf{x}$ . Связь между функциями  $g_1$  и  $g_2$  определяется условием (рис. 2):

$$g_2(s, t) \equiv g_2(\mathbf{x}_{otr}(s), t) = g_1^+(\mathbf{x}_{otr}(s), t) - g_1^-(\mathbf{x}_{otr}(s), t) \quad (14)$$

где  $g_1^+(\mathbf{x}_{otr}(s), t)$  - предельное значение функции  $g_1$  при подходе к точке  $\mathbf{x}_{otr}(s)$  вдоль верхней части поверхности  $\sigma_1$  купола парашюта, а  $g_1^-(\mathbf{x}_{otr}(s), t)$  - предельное значение функции  $g_1$  при подходе к точке  $\mathbf{x}_{otr}(s)$  вдоль нижней части поверхности  $\sigma_1$ . При этом мы предполагаем, что вектор нормали на верхней части поверхности купола направлен вверх, на нижней вниз (т.е. наружу от купола). Также предполагаем, что на поверхности вихревого следа вектор положительной нормали к поверхности  $\sigma_2$  направлен вверх.



Р и с у н о к 2 – Сход вихревой пелены с поверхности купола парашюта

Для определения аэродинамического нагружения поверхности купола, характеризуемого перепадом давления  $\Delta p$  на разомкнутой поверхности  $\sigma_1$ , записывается интеграл Коши-Лагранжа

$$p = p_\infty + \rho \mathbf{w}_\infty^2 / 2 - \rho \mathbf{w}^2 / 2 - \rho \partial U / \partial t$$

Из последнего выражения следует соотношение:

$$\Delta p = \rho \mathbf{w} \Delta \mathbf{w} + \rho \partial g_1 / \partial t, \text{ где } \Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- \quad (15)$$



Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений и соотношений (10) – (14) для функций  $\mathbf{x}(s, \tau, t)$ ,  $g_1(\mathbf{x}(s), t)$ ,  $g_2(s, t)$ . При этом, если эти функции являются решением указанных уравнений, то потенциал  $u$ , определяемый формулами (7), (8), с соответствующим ему полем скоростей  $\mathbf{w}$ , удовлетворяют задаче (1)-(6). Аэродинамическое нагружение купола парашюта определяется формулой (15).

Численная схема метода вихревых рамок, возникает при дискретизации уравнений (10) - (14).

Пусть  $\Delta t > 0$  - шаг дискретизации по времени. В каждый момент времени  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , поверхность парашюта  $\sigma_1$  и вихревого следа  $\sigma_2$  аппроксимируются четырехугольными ячейками, на каждой из которых плотность потенциала двойного слоя постоянна. Пусть  $u[S]$  - потенциал двойного слоя с плотностью  $G = 1$ , размещенного на поверхности  $S$  с краем, и пусть  $\mathbf{w}[S] = -\nabla u[S]$ . По закону Био-Савара [6] векторное поле  $\mathbf{w}[S]$  представляется как поле скоростей, индуцируемое вихревой нитью с циркуляцией  $G = 1$ , размещенной на контуре  $\partial S$  - краю поверхности  $S$ :

$$\mathbf{w}[S](\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \nabla_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{l}_y \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{r^3}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (16)$$

направление обхода контура  $\partial S$  выбирается так, что если при обходе вектор нормали  $\vec{n}$  направлен вверх, то поверхность остается слева. Исходя из этого по контуру каждой ячейки разбиения поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , помещается замкнутая вихревая нить (вихревая рамка), причем, в случае четырехугольной рамки интеграл в правой части формулы (16) вычисляется аналитически [6]. Поверхность купола разбивается на неподвижные рамки, интенсивности которых неизвестны и меняются со временем, а вихревые следы, в соответствии с уравнениями (10) - (11), моделируются рамками, сходящими в поток с линий отрыва в дискретные моменты времени и далее движущиеся вместе с жидкостью, имея не зависящие от времени циркуляции. При этом предполагается, что линии отрыва потока аппроксимируются

ломаными, звенья которых являются сторонами ячеек разбиения поверхности тела.

Скорость жидкости в момент времени  $t_k$  ищется в виде:

$$\mathbf{w}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\infty + \sum_{j=1}^N \Gamma_j^k \mathbf{w}[\sigma_1^j](\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{N_k} \delta_r \mathbf{w}[\sigma_2^{r,k}](\mathbf{x}) \quad (17)$$

где  $\sigma_1^j$ ,  $j=1,2,\dots,N$ , - ячейки разбиения поверхности купола парашюта,  $\Gamma_j^k$  - циркуляция вихревой рамки, размещенной на ячейке  $\sigma_1^j$  в момент времени  $t_k$ ,  $\sigma_2^{r,k}$ ,  $r=1,2,\dots,N_k$  - ячейки разбиения поверхности вихревого следа в момент времени  $t_k$  (число этих ячеек  $N_k$  зависит от  $t_k$ ),  $\delta^r$  - циркуляция вихревой рамки, размещенной на ячейке  $\sigma_2^{r,k}$ .

Если предположить, что в некоторый момент времени  $t$  известна форма поверхности вихревого следа  $\sigma_2$  и функция  $g_2$ , то уравнение (13) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции  $g_1(\mathbf{x}, t)$ . Для приближенного решения такого уравнения на каждой  $i$ -ой ячейке разбиения поверхности тела  $\sigma_1$  берется точка коллокации (контрольная точка)  $\mathbf{x}_{0i}$  и записывается система линейных уравнений для неизвестных  $\Gamma_j^k$ :

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} \Gamma_j^k = f_i^k, \quad i=1,2,\dots,N \quad (18)$$

где

$$w_{ij} = \mathbf{w}_j(\mathbf{x}_{0i}) \mathbf{n}_i,$$

$$f_i^k = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \sum_{r=1}^{N_k} \delta_r \mathbf{w}[\sigma_2^{r,k}](x_{0i}),$$

$\mathbf{n}_i$  - вектор нормали к поверхности тела в контрольной точке  $\mathbf{x}_{0i}$ .

Разбиение поверхности  $\sigma_1$  на ячейки следует производить так, чтобы, во-первых, ячейки не перекрывали друг друга и между ними не было щелей, во-вторых, угловые точки соседних ячеек разбиения должны совпадать и никакая из угловых точек ячеек разбиения не должна лежать между

угловыми точками соседней рамки. Контрольная точка  $\mathbf{x}_{0i}$  помещается на пересечении отрезков, соединяющих середины противоположных сторон  $i$ -ой ячейки, а вектор нормали  $\mathbf{n}_i$  определяется как вектор, перпендикулярный этим отрезкам.

При разбиении поверхностей сложной формы может возникнуть необходимость использовать в некоторых местах треугольные ячейки. Такие ячейки следует рассматривать как вырожденный случай четырехугольных при совпадении двух угловых точек, и контрольную точку следует помещать в середину медианы, опущенной из сдвоенной точки.

Последовательность решения задачи такова. В начальный момент времени вихревого следа нет, и циркуляции  $\Gamma_i^1$ ,  $i = \overline{1, N}$  определяются из уравнений (18) с правыми частями  $f_i^1 = -(\mathbf{w}_\infty, \mathbf{n}_i)$ . Затем в каждую из угловых точек ячеек, лежащих на линии отрыва, помещается жидкая частица и определяется положение такой частицы в следующий момент времени  $t_2$  по формуле:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{w}^k(\mathbf{x})\Delta t \quad (19)$$

где  $k=1$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  - точки, в которых находится рассматриваемая частица жидкости в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. Каждая пара соседних угловых точек рамок  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  на линии отрыва  $L$  вместе с парой точек  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2$ , в которые сместились частицы жидкости из точек  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , образуют четырехугольную рамку  $\mathbf{x}_1\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\mathbf{x}_2$ , которая рассматривается, как рамка, лежащая на поверхности вихревого следа  $\sigma_2(t_2)$ . Интенсивность такой рамки  $\delta$  находится из соотношений, аппроксимирующих уравнения (14). На куполе имеются две рамки, содержащие рассматриваемый отрезок  $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2]$  - одна на верхней поверхности, другая на нижней. Пусть циркуляция первой из указанных рамок на куполе в момент времени  $t_1$  равна  $\Gamma$ , а другой  $\Gamma'$ . Тогда  $\delta = \Gamma - \Gamma'$ . Таким образом, получена форма вихревого следа и циркуляции  $\delta$ , рамок, моделирующих след в момент времени  $t_2$ .

Далее на каждом  $k$ -ом шаге предполагаются известными положения угловых точек рамок, моделирующих вихревой след, и их интенсивности в момент времени  $t_k$ . Из системы уравнений (18) находятся неизвестные интенсивности  $\Gamma_j^k$  рамок, моделирующих тело,  $j=1, \dots, N$ . После этого каждая угловая точка рамки  $\mathbf{x}$ , моделирующей вихревой след, сдвигается по скорости жидкости в новое положение  $\mathbf{x}'$  в соответствии с формулой (19). При этом, как и на первом шаге, возникает новый слой вихревых рамок. Интенсивности вновь образовавшихся рамок вычисляются, как и на первом шаге. Интенсивности рамок в вихревом следе, образовавшихся на предыдущих шагах, предполагаются неизменными в соответствии с уравнением (12).

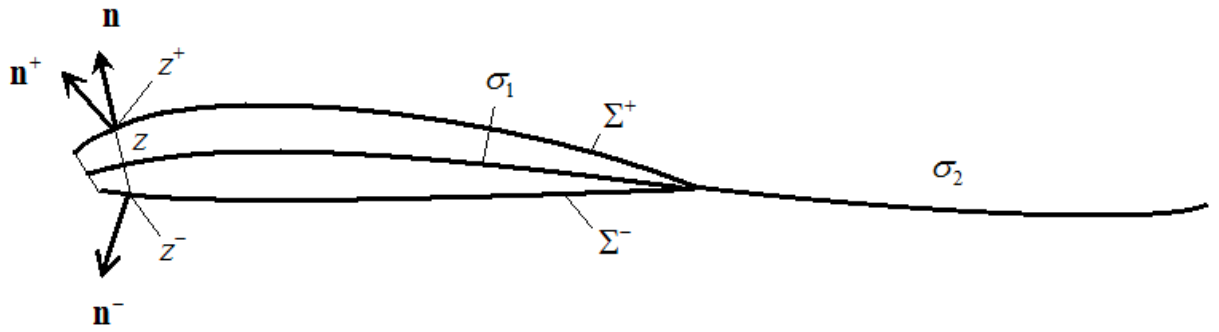
### **3. Метод вихревых рамок расчета обтекания купола парашюта со снесением граничного условия на срединную поверхность**

В данном подходе мы пренебрегаем учетом внутренних и боковых нервюр, а также косынок, на картину обтекания. Пусть  $\Sigma$  - есть внешняя поверхность купола парашюта (без боковых нервюр), являющаяся объединением верхнего полотнища - поверхность  $\Sigma^+$ , и нижнего полотнища - поверхность  $\Sigma^-$ .

Предположим, что поверхность  $\Sigma$  устроена следующим образом (см. рисунок 3). Имеется некоторая средняя поверхность  $\Sigma_0$ , и для каждой точки  $\mathbf{z} \in \Sigma_0$  определены точки

$$\mathbf{z}^\pm(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \pm \lambda(\mathbf{z})\mathbf{n} / 2,$$

причем,  $\lambda(\mathbf{z}) \geq 0$  во всех точках поверхности  $\Sigma_0$ ,  $\mathbf{n}$  - орт нормали к поверхности  $\Sigma$ . Точки  $\mathbf{z}^\pm(\mathbf{z})$  образуют поверхности  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , соответственно.



Р и с у н о к 3 – Поперечное сечение купола планирующего парашюта

Считаем, что на поверхностях  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  определены орты нормалей  $\mathbf{n}^+$  и  $\mathbf{n}^-$  соответственно, внешние по отношению к поверхности  $\Sigma$ . Предполагается, что  $\lambda(\mathbf{z}) = 0$  на задней кромке поверхности  $\sigma_1$ , причем, на задней кромке расположена линия отрыва  $L$  и на ней образуется поверхность вихревого следа  $\sigma_2 = \sigma_2(t)$ .

Обозначим  $\Omega_0$  - область пространства вне объединения поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Снова ищем поле скоростей  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\infty + \text{grad} u$ , где  $u$  - потенциал возмущенного поля скоростей, которое должно быть определено в каждый момент времени в области  $\Omega_0$  и удовлетворять условиям (1) - (6), кроме условия (3) на поверхности купола. Вместо условия (3) ставится граничное условие на поверхности  $\sigma_1$  (срединной поверхности)

$$\mathbf{w}^+ \mathbf{n}^+ = 0, \mathbf{w}^- \mathbf{n}^- = 0,$$

где  $\mathbf{n}^+$  и  $\mathbf{n}^-$  есть векторы нормали, снесенные с исходной поверхности (см. рисунок 3). Последнее условие можно записать как следующее условие для потенциала возмущенных скоростей

$$(\text{grad} u)^+ \mathbf{n}^+ = f^+, (\text{grad} u)^- \mathbf{n}^- = f^- \text{ на } \sigma_1, \quad (20)$$

где  $f^+ = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}^+$ ,  $f^- = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}^-$ .

Решение такой задачи ищем в виде

$$u(\mathbf{x}) = U[\sigma_1, g_1](\mathbf{x}) + V[\sigma_1, \mu](\mathbf{x}) + U[\sigma_2, g_2](\mathbf{x}), \quad (21)$$

где  $U[\Sigma, g]$  - потенциал двойного слоя, определяемый выражением

$$U[\Sigma, g_i](\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} g_i(\mathbf{y}, t) d\sigma_y, \quad i=1,2$$

$V[\Sigma, \mu]$  - потенциал простого слоя, определяемый выражением

$$V[\Sigma, \mu](\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} \mu(\mathbf{y}, t) F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy,$$

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Для граничных значений векторного поля  $\mathbf{w}$  на поверхности  $\sigma_1$  в предположении, что функция  $g$  имеет на поверхности  $\sigma_1$  поверхностный градиент  $Grad g$ , и что функции  $\mu$  и  $Grad g$  непрерывны по Гельдеру, выполнены следующие соотношения [20, с.62]:

$$\mathbf{w}^{\pm} = \mathbf{w}_{\infty} + (\nabla u)^{\pm} = \mathbf{w} \mp \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) \mathbf{n} \pm \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}], \quad (22)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times Grad g, \quad (23)$$

$\mathbf{w}$  есть прямое значение вектора скорости, получаемое из интегрального представления:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_{\infty} + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}, t) \times \nabla_x F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy + \int_{\sigma_2} g_2(\mathbf{y}, t) \nabla_x \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} dy \\ + \int_{\sigma_1} \mu(\mathbf{y}, t) \nabla_x F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy \end{aligned} \quad (24)$$

интегралы понимаются в смысле главного значения. Заметим, также, что, как показано в [21, с.125], для краевых значений нормальной производной функции  $u_1 = U[\sigma_1, g_1]$  справедливы соотношения

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial n} \right)^{\pm}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \int_{\sigma_1} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y}, t) \times \nabla_x F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy = \int_{\sigma_1} g(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} dy, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_0 \quad (25)$$

где последний интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару (эта формула аналогична формуле (9)).

Также, как и в исходной постановке задачи, предполагаем, что движение вихревого следа описывается уравнениями (10) - (12). Вместо уравнения (13) имеем в каждый момент времени следующее граничное интегральное уравнение, вытекающее из равенств (22) - (23) и граничных условий (20):

$$\int_{\sigma_1} g_1(\mathbf{y}, t) \frac{\partial^2 F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm \partial n_y} dy + \int_{\sigma_1} \mu(\mathbf{y}, t) \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm} dy \mp$$

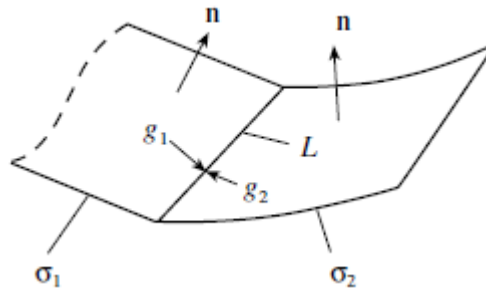
$$\mp \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}, t) (\mathbf{n} \mathbf{n}^\pm) \pm \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}] \mathbf{n}^\pm = f^\pm - \int_{\sigma_2} g_2(\mathbf{y}, t) \frac{\partial^2 F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm \partial n_y} dy, \quad (26)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n}^\pm = \mathbf{n}^\pm(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_0,$$

функция  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$  определяется выражением (23), функции  $f^\pm$  те же, что и в уравнениях (20). Кроме того, функции  $g$  и  $g_1$  связаны соотношением (вместо соотношения (14))

$$g_2(s, t) = g_1(\mathbf{x}_{otr}(s), t), \quad s: \mathbf{x}_{otr}(s) \in L \quad (27)$$

(см. рисунок 4).



Р и с у н о к 4 – Сход вихревой пелены со срединной поверхности купола парашюта.

### 3. Численная схема решения задачи со снесенными граничными условиями

Так же, как и в численной схеме решения исходной задачи, срединную поверхность  $\sigma_1$  аппроксимируем неподвижными четырехугольными ячейками  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , а поверхность вихревого следа  $\sigma_2$  аппроксимируем подвижными четырехугольными ячейками, которые образуются в каждый дискретный момент времени на линии отрыва. В центре каждой ячейки на срединной поверхности купола выбираем точку коллокации  $\mathbf{x}_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  (выбор этих точек осуществляем так же, как и в исходной схеме). Предположим, что угловые точки ячеек  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  лежат на поверхности  $\sigma_1$ . Тогда для каждой вершины  $\mathbf{z}$  каждой такой ячейки определены точки  $\mathbf{z}^\pm(\mathbf{z})$  на верхней и нижней поверхностях крыла, и тем самым определены системы ячеек  $\sigma_i^+$  и  $\sigma_i^-$ ,  $i = 1, \dots, n$ , аппроксимирующих верхнюю и нижнюю поверхности купола парашюта  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , соответственно. Пусть  $\mathbf{n}_i^+$  и  $\mathbf{n}_i^-$  - векторы нормалей к ячейкам  $\sigma_i^+$  и  $\sigma_i^-$ ,  $i = 1, \dots, n$ , соответственно, которые можно опять построить как перпендикуляры к отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон ячеек.

Скорость жидкости в момент времени  $t_k$  ищется в виде:

$$\mathbf{w}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\infty + \sum_{j=1}^N \Gamma_j^k \mathbf{w}[\sigma_1^j](\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \mu_j^k \mathbf{v}[\sigma_1^j](\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{N_k} \delta_r \mathbf{w}[\sigma_2^{r,k}](\mathbf{x}) \quad (28)$$

где  $\sigma_1^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , - ячейки разбиения поверхности купола парашюта,  $\Gamma_j^k$  - циркуляция вихревой рамки, размещенной на ячейке  $\sigma_1^j$  в момент времени  $t_k$ ,  $\sigma_2^{r,k}$ ,  $r = 1, 2, \dots, N_k$  - ячейки разбиения поверхности вихревого следа в момент времени  $t_k$  (число этих ячеек  $N_k$  зависит от  $t_k$ ),  $\delta_r$  - циркуляция вихревой рамки, размещенной на ячейке  $\sigma_2^{r,k}$ ,  $\mu_j^k$  приближенное значение



плотности потенциала простого слоя  $\mu(\mathbf{x}, t)$  в точке  $\mathbf{X}_{0i}$  в момент времени  $t_k$ , скорость  $\mathbf{w}[\sigma_1^j]$  определяется также, как и в выражении (17),

$$\mathbf{v}[\sigma](\mathbf{x}) = \int_{\sigma} \nabla_x F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (29)$$

Если предположить, что в некоторый момент времени  $t_k$  известна форма поверхности вихревого следа  $\sigma_2$  и функция  $g_2$ , то уравнения (27) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных функций  $g_1(\mathbf{x}, t)$  и  $\mu(\mathbf{x}, t)$ . Для приближенного решения этой системы уравнений записывается система линейных уравнений для неизвестных  $\Gamma_j^k$  и  $\mu_j^k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ \Gamma_j^k + \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ \mu_j^k + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}_i^k \times \mathbf{n}_i] \mathbf{n}_i^+ - \frac{1}{2} \mu_i^k \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^+ &= f_i^+ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}^- \Gamma_j^k + \sum_{j=1}^n b_{ij}^- \mu_j^k - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}_i^k \times \mathbf{n}_i] \mathbf{n}_i^- + \frac{1}{2} \mu_i^k \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^- &= f_i^- \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$f_i^+ = \left[ -\mathbf{w}_{\infty} - \sum_{r=1}^{N_k} \delta_r \mathbf{w}[\sigma_2^{r,k}](\mathbf{x}) \right] \mathbf{n}_i^+, \quad f_i^- = \left[ -\mathbf{w}_{\infty} - \sum_{r=1}^{N_k} \delta_r \mathbf{w}[\sigma_2^{r,k}](\mathbf{x}) \right] \mathbf{n}_i^-,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$a_{ij}^{\pm} = -\mathbf{w}[\sigma_1^j](\mathbf{x}_i) \mathbf{n}_i^{\pm}, \quad \text{соответственно, } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$b_{ij}^{\pm} = \mathbf{v}[\sigma_1^j](\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) s_j \mathbf{n}_i^{\pm}, \quad \text{соответственно, при } i \neq j, \quad b_{ii}^{\pm} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$j = 1, \dots, n, \quad \text{векторы } \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{определяются выражением (35),}$$

$$\text{векторные функции } \mathbf{V}_j \quad \text{определяются формулой (16),}$$

$$\mathbf{V}_{\mu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\nabla_x F(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\gamma}_i^k - \text{величина, аппроксимирующая значение}$$

$$\text{функции } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times \text{Grad } g \quad \text{в точке } \mathbf{x}_i \quad \text{в момент времени } t_k.$$

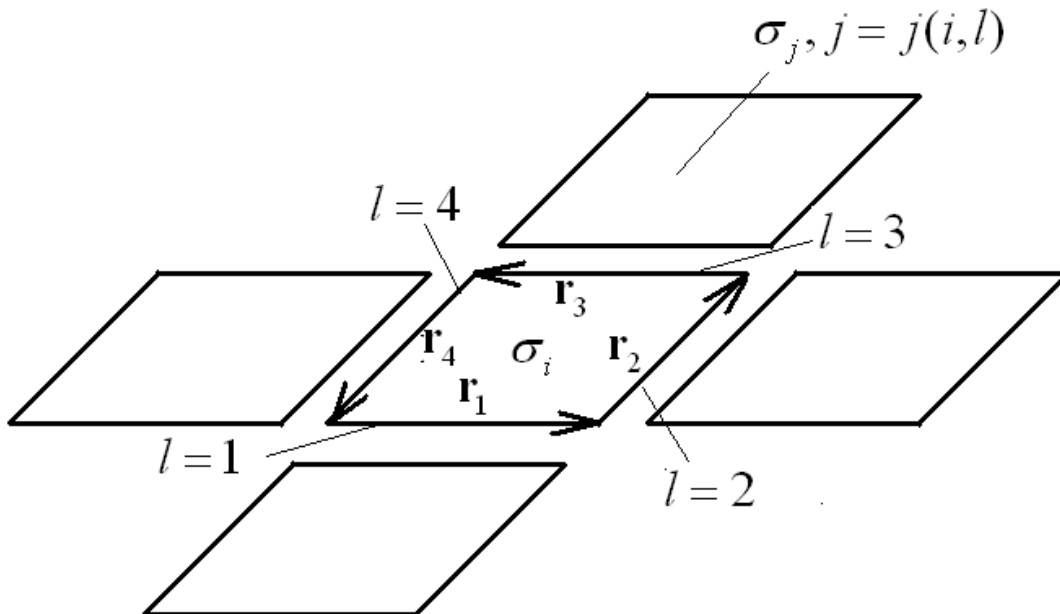
Приближенное значение  $\boldsymbol{\gamma}_i^k$  вектора  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}_{0i}, t_k)$  предлагается искать по формуле, предложенной в статье [9] (см. рисунок 5):

$$\gamma_i^k = \frac{\Gamma_{i,1}^k + \Gamma_{i,2}^k + \Gamma_{i,3}^k + \Gamma_{i,4}^k}{S_i}, \quad (31)$$

векторы  $\Gamma_l^i$ , где  $l=1,2,3,4$  - номера сторон рассматриваемой ячейки, вычисляются по формулам:

- а)  $\Gamma_{i,l}^k = (\Gamma_i^k - \Gamma_{j(l,i)}^k) \mathbf{r}_l / 2$ , где  $j(l,i)$  номер соседней ячейки разбиения поверхности  $\sigma_1$ , граничащей с данной ячейкой  $\sigma_i$  по стороне с номером  $l$ , если таковая есть,
- б)  $\Gamma_{i,l}^k = 0$  если сторона с номером  $l$  лежит на линии отрыва,
- в)  $\Gamma_{i,l}^k = \Gamma_i^k \mathbf{r}_l$  - если сторона с номером  $l$  не лежит на линии отрыва и никакая из ячеек разбиения поверхности  $\sigma_1$  не граничит с данной ячейкой  $\sigma_i$  по стороне с номером  $l$ ,

$\mathbf{r}_l$  - вектор, лежащий на стороне с номером  $l$  рассматриваемой ячейки  $\sigma_i$  в направлении положительного обхода границы ячейки.



Р и с у н о к 5 – Нахождение интенсивности вихревого слоя.

Заметим, что при этом для каждого  $i = 1, \dots, n$ , выражения  $[\gamma_i^k \times \mathbf{n}_i] \mathbf{n}_i^\pm$  есть линейные комбинации независимых  $\Gamma_i, i = 1, \dots, n$ , коэффициенты которых могут быть рассчитаны на основании формулы (31). Поэтому уравнения (30) образуют систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\Gamma_j^k$  и  $\mu_j^k, j = 1, \dots, n$ , при известных правых частях.

Таким образом, задача решается по схеме, описанной в п.2, при использовании выражения для поля скоростей в виде (28) вместо (17) и с заменой системы линейных уравнений (18) на систему (30).

#### 4. Расчет нагрузок

В предложенной модели со снесением граничного условия осуществляется расчет распределения давления по верхней и нижней сторонам срединной поверхности. Далее эти давления переносятся на реальную поверхность парашюта.

Сначала описывается алгоритм вычисления распределения давления по верхней и нижней сторонам срединной поверхности. Поскольку в данной задаче не рассматриваются эффекты, связанные с нестационарными течениями, а ищется предельное стационарное течение, получим формулы для расчета давления в предположении о стационарности течения. При этом полученные значения давления будут правильными, когда течение установится.

Давление в жидкости будем характеризовать безразмерным коэффициентом давления.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q} \quad (32)$$

где  $p$  - давление в рассматриваемой точке жидкости,  $p_\infty$  - давление невозмущенного потока на бесконечности,  $q = \rho \mathbf{w}_\infty^2 / 2$  - скоростной напор,

$\rho$  - плотность жидкости. При этом давление в каждой точке течения связано с полем скоростей интегралом Бернулли:

$$p + \frac{\rho \mathbf{w}^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho \mathbf{w}_\infty^2}{2}$$

В случае тонкой поверхности  $\Sigma_0$  ищем краевые значения коэффициента давления, для которых справедливо выражение:

$$C_p^\pm = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{w}^{\pm 2}}{\mathbf{w}_\infty^2}. \quad (33)$$

При этом предполагаем, что поле скоростей определяется выражением (24), а для его краевых значений справедливы выражения (22) - (23).

При численном расчете ищутся приближенные значения коэффициента давления в точках коллокации  $\mathbf{x}_{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в момент времени  $t_k$  на основании формул (33), где

$$\left( \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i}) \right)^\pm = \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i}) \pm \frac{1}{2} \Delta \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i}), \quad (34)$$

соответственно,  $\mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i})$  - прямое значение вектора скорости, получаемое непосредственно из выражения (28),  $\Delta \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i})$  - разность скоростей на верхней и нижней поверхности, для которой используется выражение

$$\Delta \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{0,i}) = \mu_i^k \mathbf{n}_i + [\boldsymbol{\gamma}_i^k \times \mathbf{n}_i], \quad (35)$$

векторы  $\boldsymbol{\gamma}_i^k$  определяются по формулам (31).

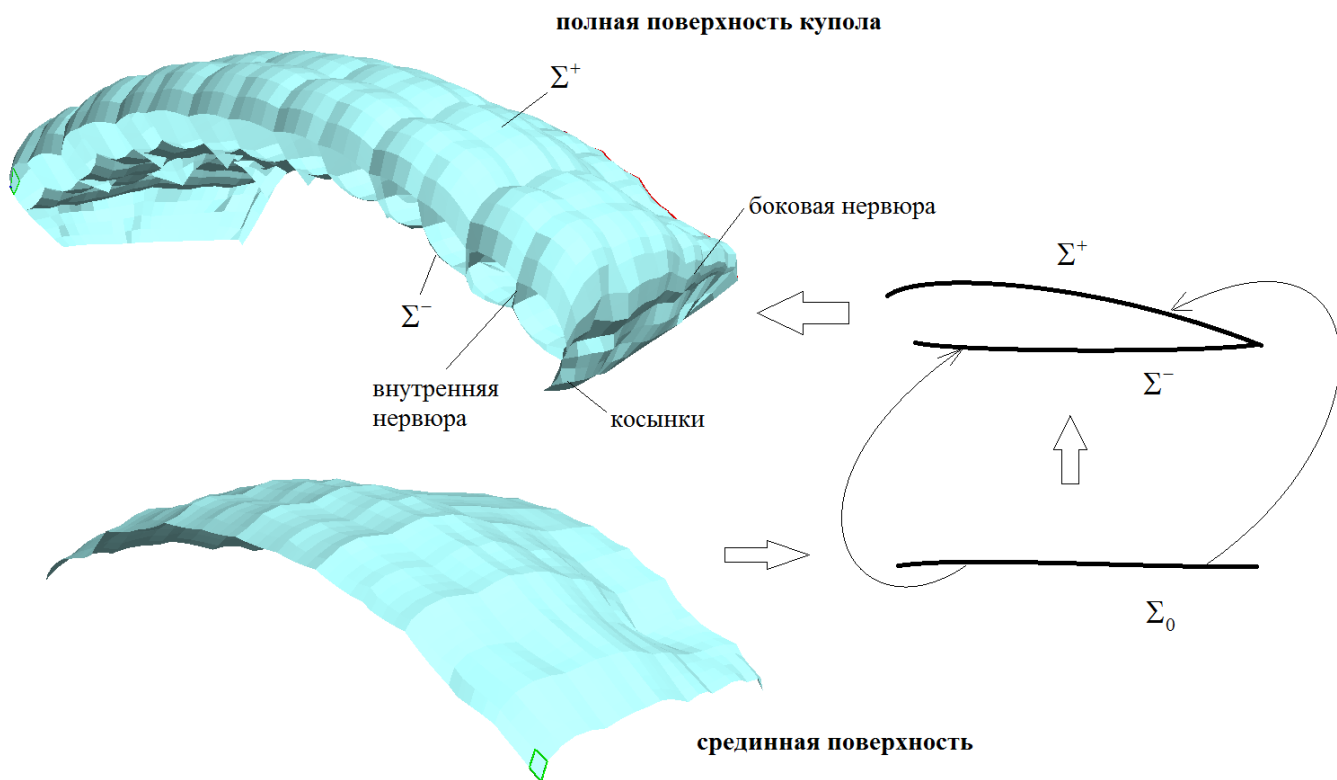
После того, как рассчитаны значения коэффициентов давления в точках коллокации на срединной поверхности  $\Sigma_0$ , осуществляется пересчет нагрузок на исходную поверхность. При этом мы определяем значения перепада коэффициента давления на исходной поверхности купола парашюта в предположении, что в области внутри купола парашюта коэффициент давления равен 1. Такое предположение соответствует гипотезе о том, что скорости воздушного потока внутри купола пренебрежимо малы. Пересчет

давлений делается по следующей схеме (см. рисунок 6). На верхней и нижней поверхности определяем перепад коэффициента давления по формуле:

$$\Delta C_p(\mathbf{z}_i^+) = 1 - C_p^+(x_{0,i})$$

$$\Delta C_p(\mathbf{z}_i^-) = 1 - C_p^-(x_{0,i}),$$

где  $\mathbf{z}_i^+$  и  $\mathbf{z}_i^-$  - точки на верхней и нижней поверхностях купола, соответствующие точке коллокации  $x_{0,i}$  на срединной поверхности, на боковой нервюре полагаем  $\Delta C_p = 1$ , на внутренних нервюрах и косынках полагаем  $\Delta C_p = 0$ .



Р и с у н о к 6 – Схема пересчета давлений

После перенесения нагрузок на полную поверхность купола осуществляется расчет суммарных аэродинамических сил давления и моментов аэродинамических сил давления:

$$\mathbf{F}_p = \rho \frac{W_\infty^2}{2} \sum_{i=1}^N dC_{p,j} s_j \mathbf{n}_j,$$

$$\mathbf{M}_p = \rho \frac{W_\infty^2}{2} \sum_{i=1}^N dC_{p,j} s_j [(\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}_j],$$

где сумма берется по всем ячейкам разбиения полной поверхности купола парашюта,  $dC_{p,j}$  - значения перепада коэффициента давления на ячейках разбиения полной поверхности,  $\mathbf{x}_j$  - центры ячеек разбиения полной поверхности, а  $\mathbf{n}_j$  и  $s_j$  - векторы нормалей к этим ячейкам и их площади соответственно,  $\mathbf{r}_0$  - центр приведения, относительно которого вычисляются моменты.

Для расчета единого процесса обтекания и формообразования необходим также учет сил и моментов, вызванных трением ткани купола и сопротивлением строп.

Для учета силы трения, возникающей при обтекании воздушным потоком купола парашюта, используется эмпирический подход, основанный на теории пограничного слоя [12]. Расчет сил трения проводился на срединной поверхности. Предполагается, что на каждый элемент с верхней и нижней стороны срединной поверхности площадью  $d\sigma$  действует сила трения

$$d\mathbf{F} = \frac{\mathbf{w}_\tau}{|\mathbf{w}_\tau|} \tau d\sigma,$$

где  $\mathbf{w}_\tau$  есть вектор, являющийся проекцией вектора скорости на поверхности на касательную плоскость к поверхности,  $\tau$  - напряжение трения. Предполагается, что у поверхности парашюта образуется пограничный слой, который является турбулентным на всей поверхности. Тогда напряжение трения вычисляется по формуле [22]:

$$\tau = 0.0299 \rho \mathbf{w}_\tau^2 (\text{Re}_x)^{-0.2},$$

где:  $\rho = 1.25 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха,  $\mathbf{w}_\tau$  – скорость на внешней границе пограничного слоя (размерная),  $\text{Re}_x$  – местное число Рейнольдса, которое вычисляется по формуле

$$\text{Re}_x = \frac{|\mathbf{w}_\tau| x}{\nu_\delta},$$

$x$  – расстояние вдоль поверхности от передней кромки до рассматриваемой точки вдоль потока,  $\nu_\delta$  – кинематический коэффициент вязкости воздуха ( $\nu_\delta = 1.53 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , при температуре и атмосферном давлении  $T = 20^\circ \text{C}$ ,  $p = 760 \text{ мм рт/ст}$ ).

При численном моделировании для каждой контрольной точки в центре ячейки разбиения срединной поверхности с номером  $i$  находится сила трения  $\mathbf{F}_{tr}^i = \mathbf{F}_{tr}^{i+} + \mathbf{F}_{tr}^{i-}$ , где  $\mathbf{F}_{tr}^{i+}$  и  $\mathbf{F}_{tr}^{i-}$  – силы трения, действующие на рассматриваемую ячейку со стороны вектора положительной нормали и с противоположной стороны, вычисляемые по формуле

$$\mathbf{F}_{tr}^{i\pm} = \frac{\mathbf{w}_\tau^\pm}{|\mathbf{w}_\tau^\pm|} \tau^\pm d\sigma^i,$$

$d\sigma^i$  – площадь ячейки,  $\mathbf{w}_\tau^\pm$  – краевые значения вектора скорости,  $\tau^\pm$  – напряжения турбулентного трения на верхней и нижней сторонах срединной поверхности купола. Общие сила и момент трения вычисляются по формуле

$$\mathbf{F}_{tr} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{tr}^i, \quad \mathbf{M}_{tr} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_{0,i} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_{tr}^i$$

Кроме того, вычисляется эмпирически сила сопротивления строп по формулам:

$$\mathbf{F}_{str} = \sum_k \mathbf{F}_{str}^k,$$

где  $\mathbf{F}_{str}^k$  – сила сопротивления стропы с номером  $k$ , сумма берется по всем стропам, сила сопротивления стропы определяется формулой:

$$\mathbf{F}^k_{str} = \rho \frac{w_\infty^2}{2} d_k l_k C_x \sin \varphi_k \frac{\mathbf{w}_\infty}{|\mathbf{w}_\infty|},$$

где  $d_k$  - диаметр стропы,  $l_k$  - длина стропы,  $\varphi_k$  - угол между вектором скорости набегающего потока  $\mathbf{w}_\infty$  и прямой, задающей направление стропы (угол равен 90 градусов, если поток набегаёт на стропу в перпендикулярном направлении),  $C_x$  - коэффициент сопротивления стропы, принимаемый равным 1.

Момент от сил сопротивления строп определяется по формуле

$$\mathbf{M}_{str} = \sum_k (\mathbf{x}^k - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}^k_{str},$$

где  $\mathbf{x}^k$  - центр стропы.

## **5. Совместный расчет обтекания и формообразования со снесением граничного условия обтекания на срединную поверхность**

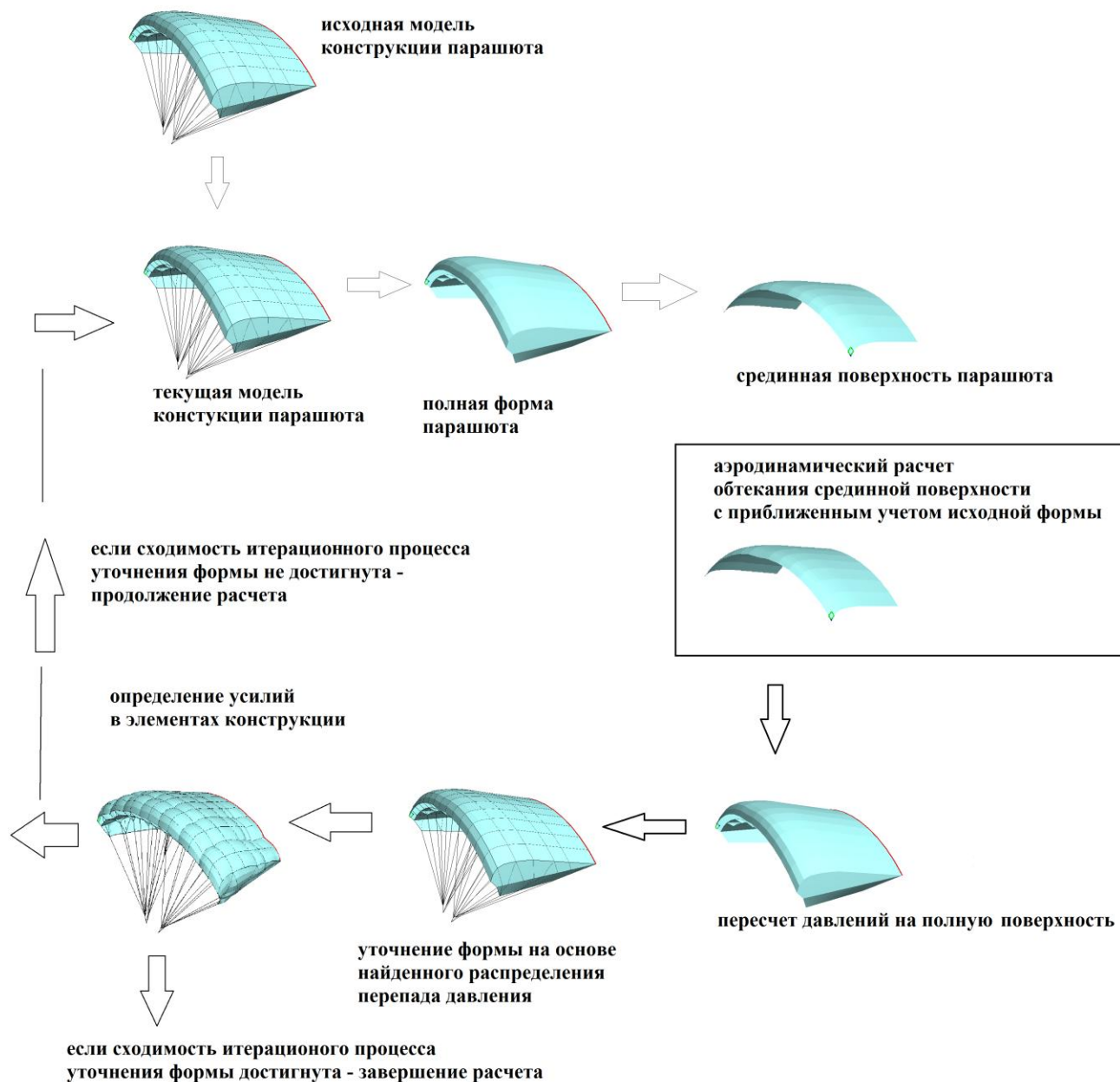
Расчет обтекания планирующего парашюта с итерационным уточнением формы производится по следующей схеме (см. рисунок 7).

Для расчета необходим файл с заданными геометрией поверхности купола парашюта, геометрией и характеристиками элементов его конструкции (файл в формате "\*.fmp", см. [9]). Этот файл передается в основной цикл алгоритма расчета как текущая модель конструкции парашюта (здесь мы подразумеваем, что конструкция парашюта включает в себя и геометрическую форму и характеристики материалов).

Далее на основе конструкции парашюта формируется математическая модель полной геометрии купола парашюта. Эта модель включает в себя вычислительную сетку разбиения поверхности купола парашюта. Далее на основе этой полной модели геометрии купола парашюта формируется математическая модель геометрии срединной поверхности - строятся ячейки, аппроксимирующие срединную поверхность. При этом из модели полной геометрии передается линия отрыва.



Далее производится аэродинамический расчет обтекания срединной поверхности с приближенным учетом телесности по схеме, описанной в п. 4. В процессе расчета на каждом шаге интегрирования по времени вычисляются распределения коэффициента давления по верхней и нижней сторонам срединной поверхности, и производится пересчет аэродинамических нагрузок на полную поверхность по схеме, описанной в п. 5. При этом формируется распределение перепада коэффициента давления по полной поверхности купола парашюта, и вычисляются суммарные силы и моменты с учетом сопротивления трения ткани и сопротивления строп.



Р и с у н о к 7 – Схема одновременного расчета обтекания и формообразования

Через заданное число шагов интегрирования по времени производится пересчет формы парашюта. При этом сформированное на данном шаге интегрирования по времени распределение перепада коэффициента давления, а также значение вектора момента аэродинамических сил (с учетом момента трения ткани и сопротивления строп), передаются в блок формообразования. В этом блоке производится уточнение формы парашюта на основании

текущих значений аэродинамических нагрузок, вычисляются характеристики напряженно-деформированного состояния парашюта.

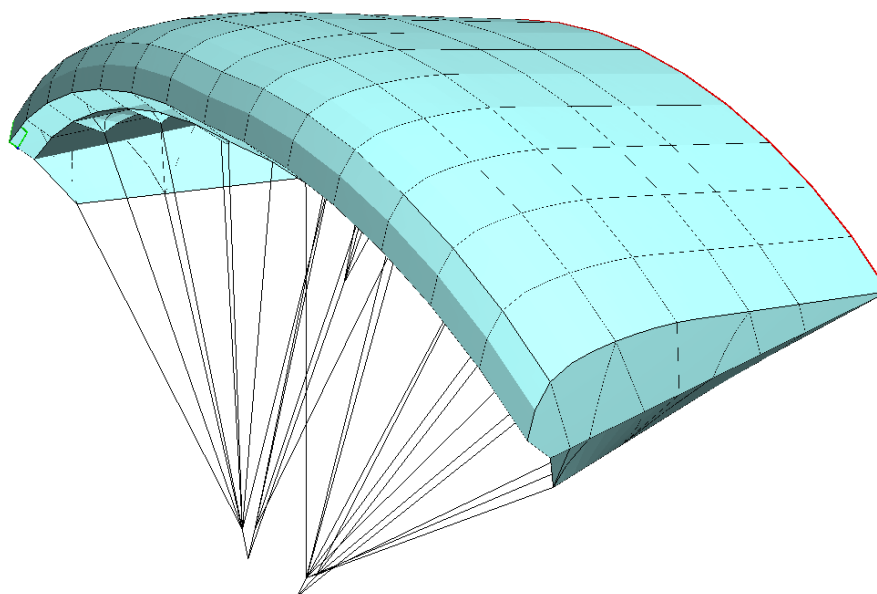
Далее полученная уточненная модель конструкции парашюта передается в начало основного цикла в качестве текущей модели конструкции парашюта и цикл повторяется. При этом аэродинамический расчет продолжается (т.е. продолжается расчет с имеющимся вихревым следом). По достижении заданного числа уточнений или по достижении условия сходимости процесса уточнения формы, характеризуемого стабилизацией аэродинамических характеристик и формы парашюта, расчет завершается.

## **7. Тестирование разработанного математического метода на модели парашюта ПО-9-7.**

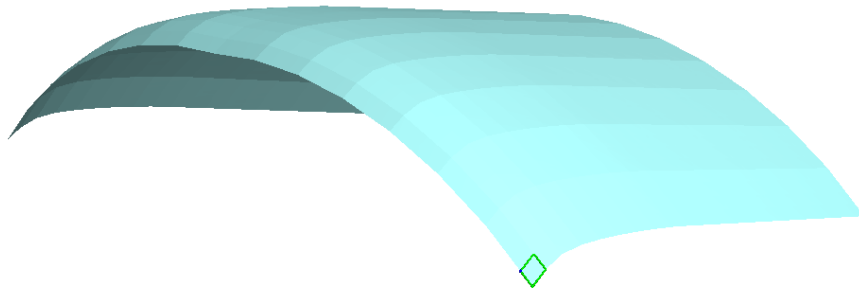
Сначала было проведено тестирование разработанной модели обтекания купола парашюта со снесением граничного условия на срединную поверхность. Была взята имеющаяся математическая модель исходной формы купола этого парашюта (рисунок 8). Сначала был проведен расчет обтекания такой исходной формы купола парашюта по разработанной математической модели со снесением граничного условия. Затем был проведен расчет с итерационным уточнением формы купола парашюта (в этом расчете также использовалась разработанная модель со снесением граничного условия). В результате была получена наполненная форма купола парашюта и определены ее аэродинамические характеристики. Для сравнения были проведены расчеты обтекания тех же конфигураций купола парашюта без снесения граничного условия. Все расчеты проводились для потока, набегающего под углом атаки 0 градусов.

На рисунке 8 приведена конфигурация исходной математической модели конструкции парашюта, а на рисунке 9 форма срединной поверхности для этой конфигурации. На рисунках 10-13 приведены цветовые диаграммы распределения перепада коэффициента давления на верхней и

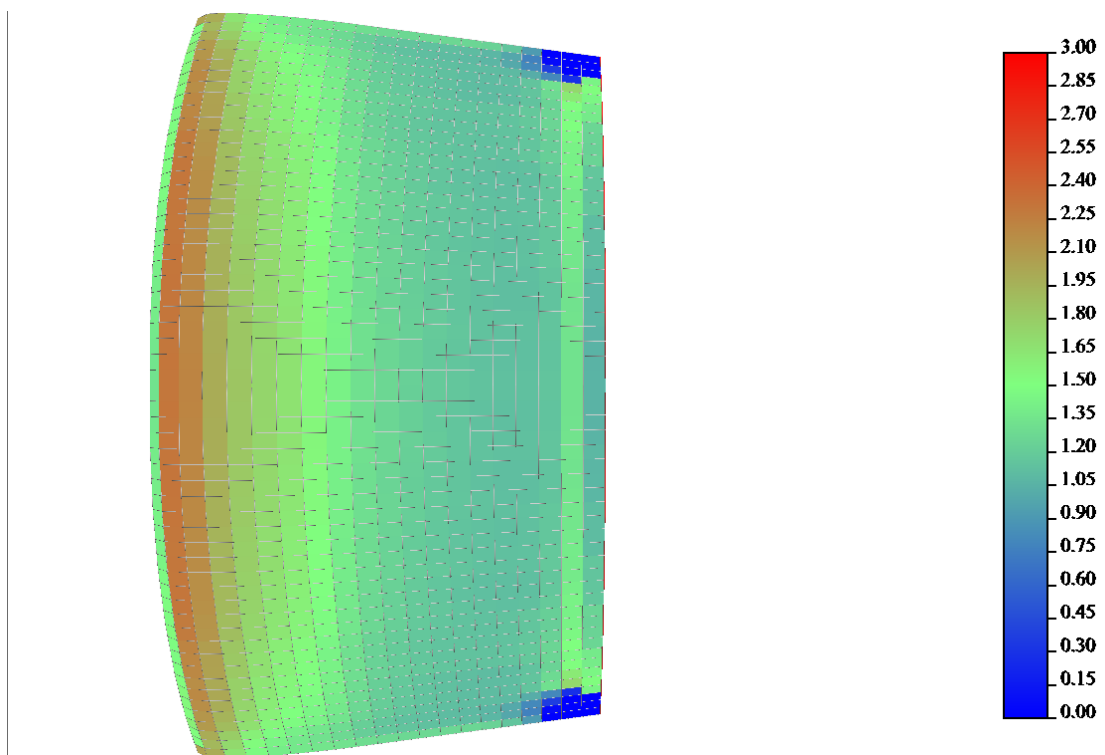
нижней поверхностях купола парашюта, полученные при прямом расчете обтекания полной формы и при расчете со снесением граничного условия на срединную поверхность. При этом для случая расчета обтекания со снесением граничного условия на срединную поверхность приведены распределения перепада коэффициента давления, пересчитанные на полную поверхность по схеме, описанной в п. 4. Также для сравнения приводятся графики распределений перепада коэффициента давления по верхней и нижней поверхностям в двух сечениях купола, расположенных вдоль потока перпендикулярно поверхности купола. Расположение указанных сечений приведено на рисунке 14. Сами графики распределений перепада коэффициента давления в этих сечениях приведены на рисунках 15 - 16. Здесь по оси абсцисс отложена координата  $x$  строительной системы координат (см. рисунок 14).



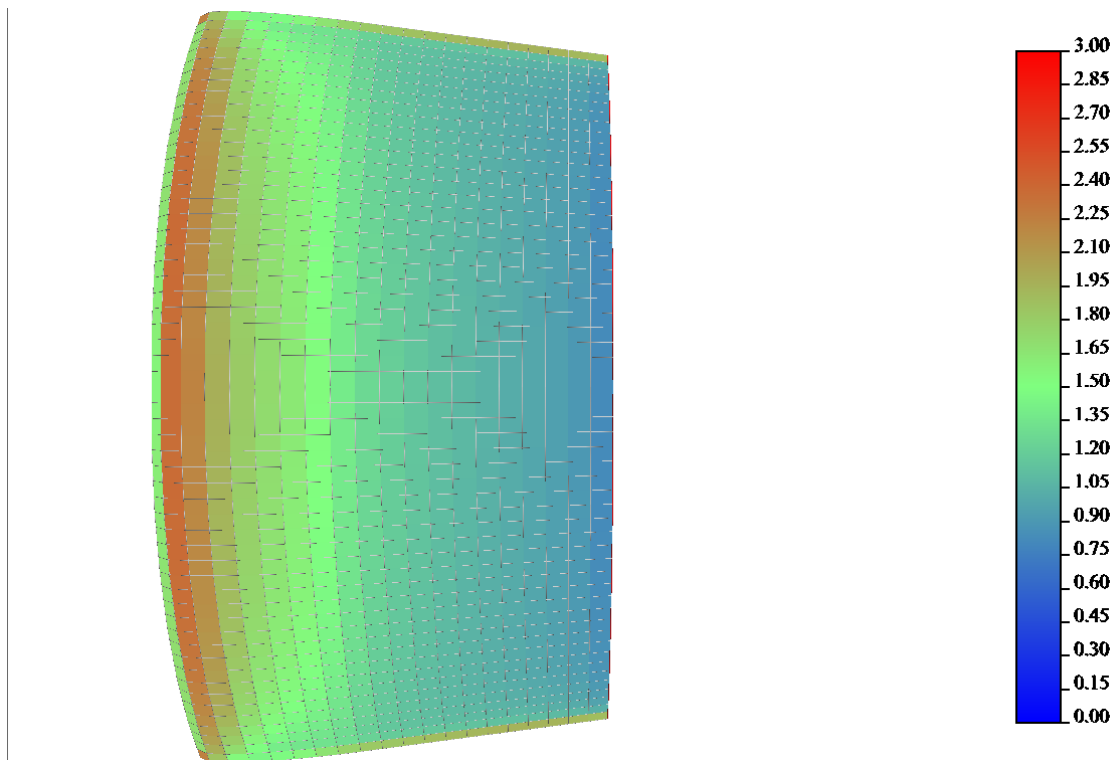
Р и с у н о к 8 – Конфигурация исходной модели парашюта



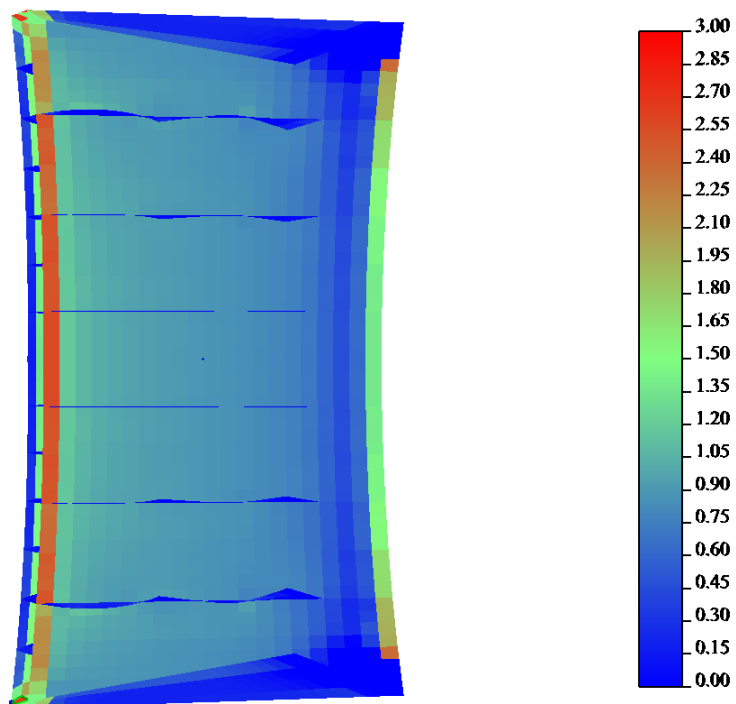
Р и с у н о к 9 – Конфигурация срединной поверхности для исходной формы купола парашюта



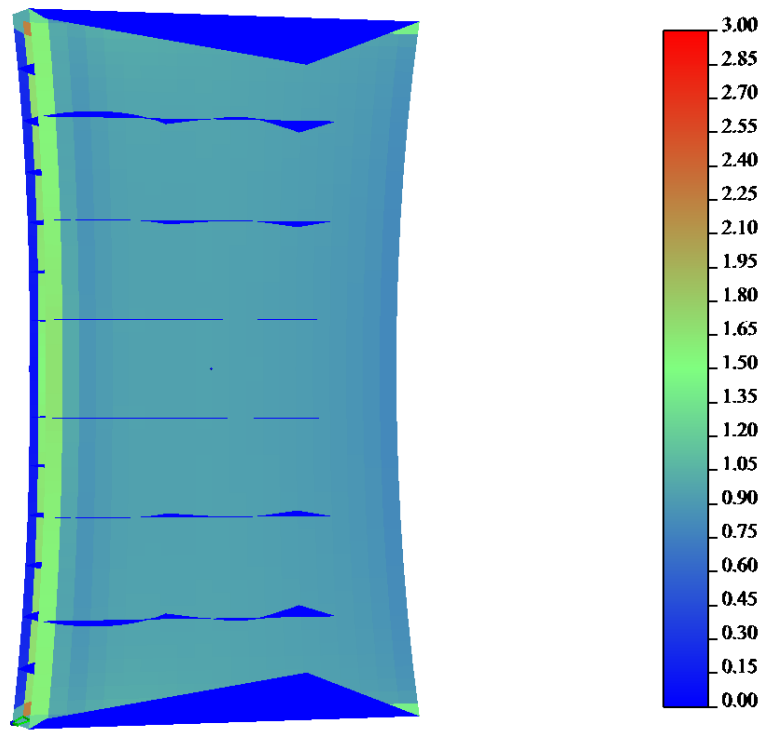
Р и с у н о к 10 – Распределение перепада коэффициента давления по верхней поверхности купола парашюта. Расчет для исходной формы в полной конфигурации.



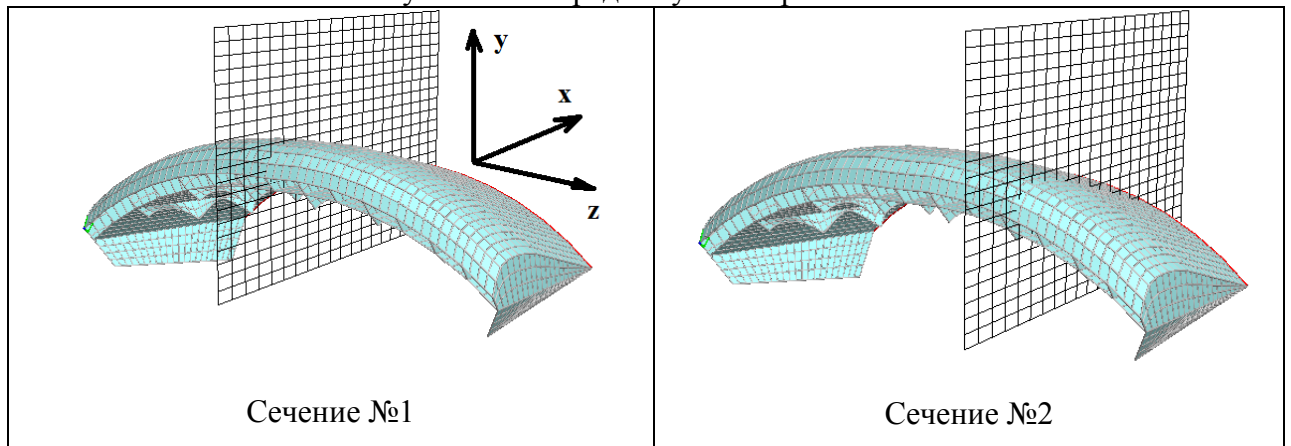
Р и с у н о к 11 – Распределение перепада коэффициента давления по верхней поверхности купола парашюта. Расчет для исходной формы со снесением граничного условия на срединную поверхность



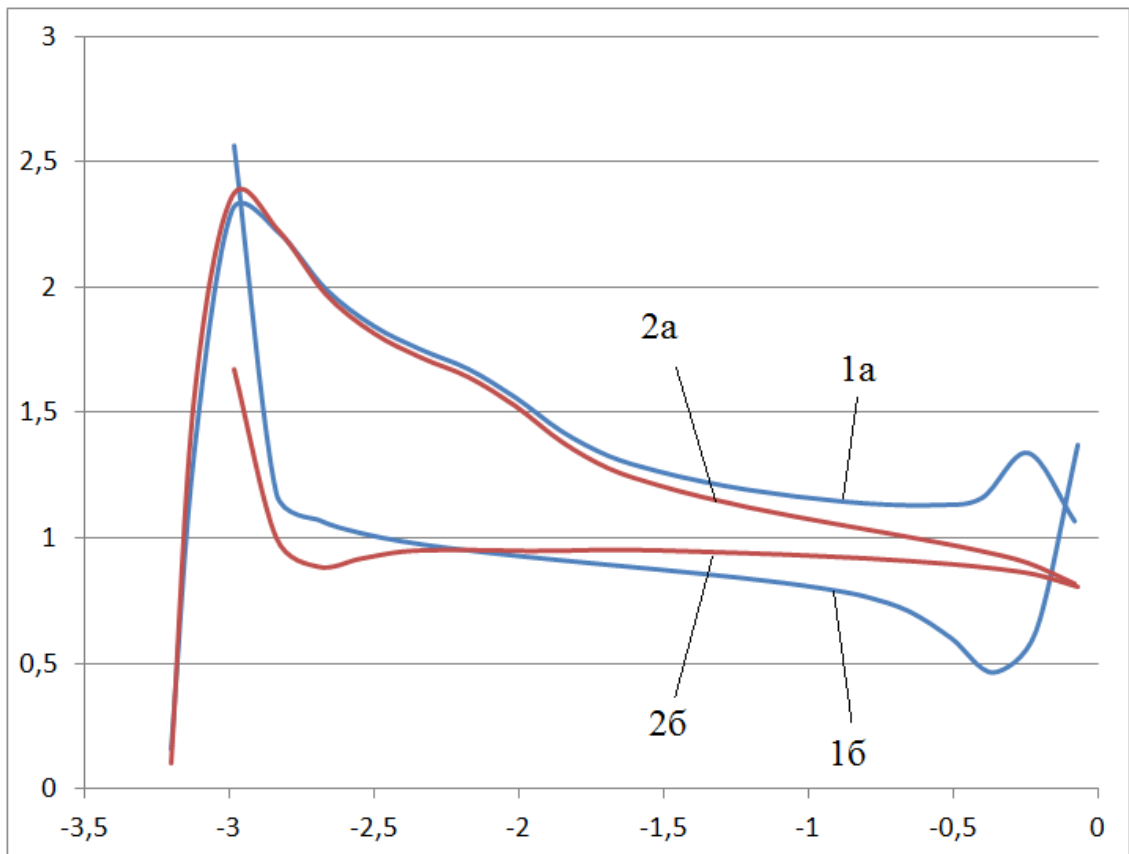
Р и с у н о к 12 – Распределение перепада коэффициента давления по нижней поверхности купола парашюта. Расчет для исходной формы в полной конфигурации.



Р и с у н о к 13 – Распределение перепада коэффициента давления по нижней поверхности купола парашюта. Расчет для исходной формы со снесением граничного условия на срединную поверхность



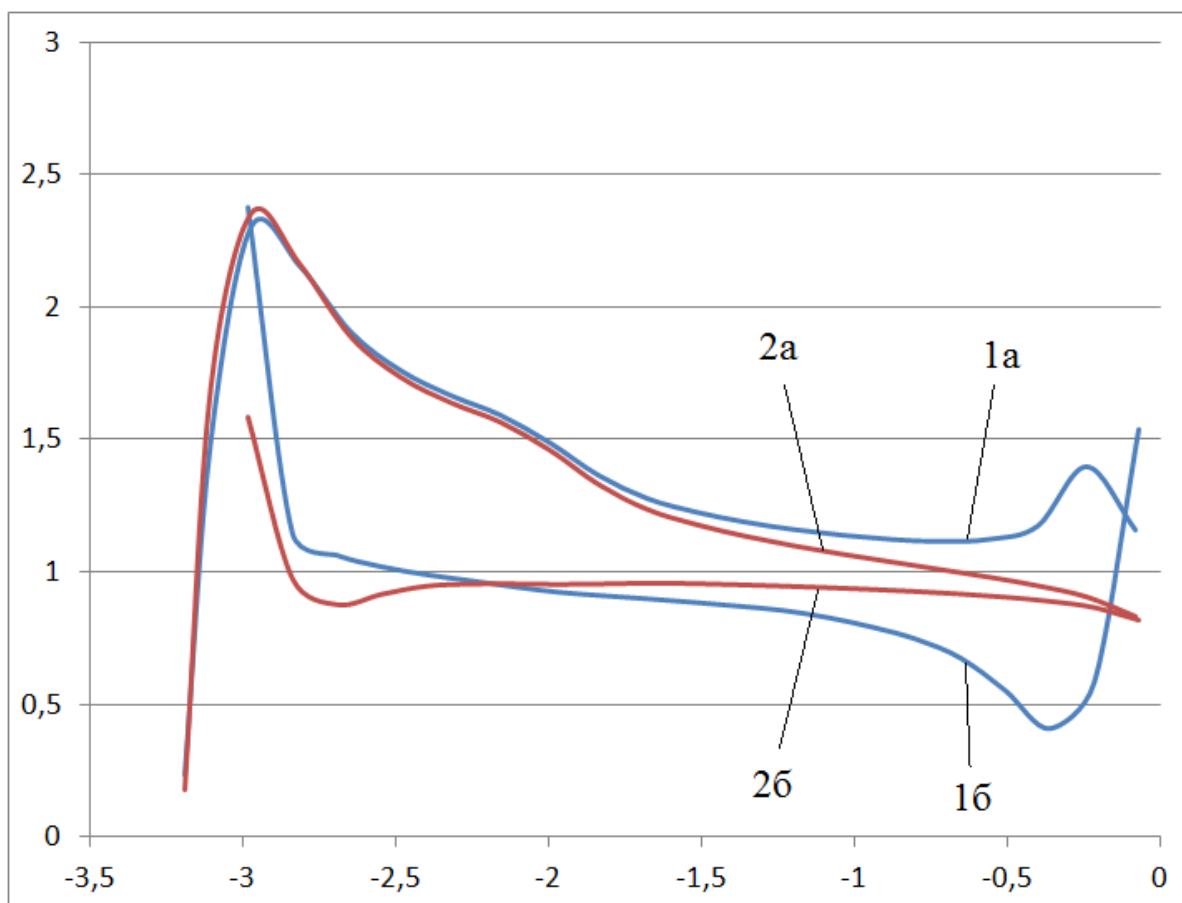
Р и с у н о к 14 – Расположение сечений, в которых строились графики распределения перепада коэффициента давления. Исходная форма



1а - расчет для полной формы, верхняя поверхность,  
 1б - расчет для полной формы, нижняя поверхность  
 2а - расчет со снесением граничного условия, верхняя поверхность,  
 2б - расчет со снесением граничного условия, нижняя поверхность

Р и с у н о к 15 – Распределение перепада коэффициента давления в сечении №1. Расчет для исходной формы купола.

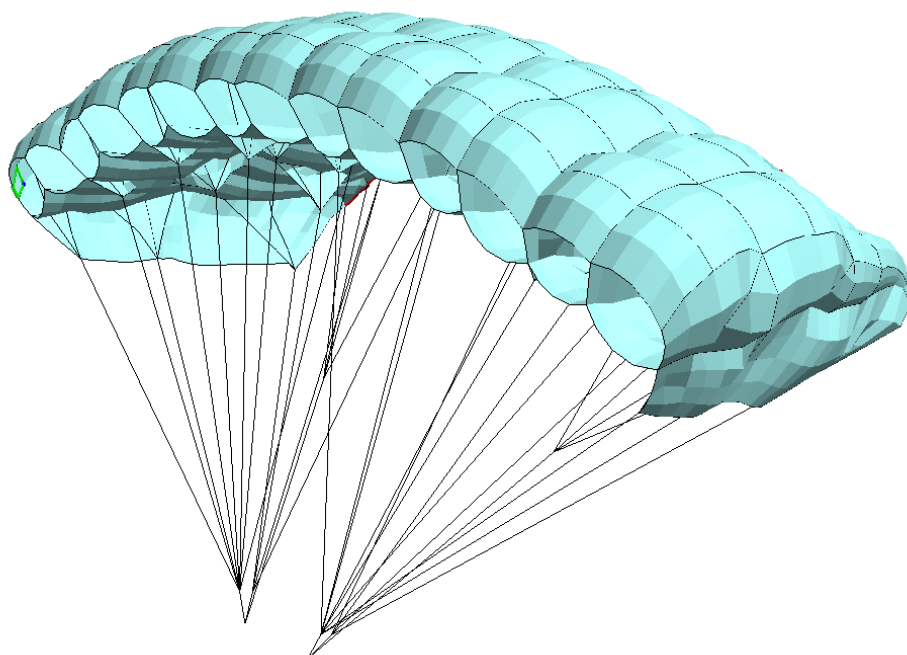




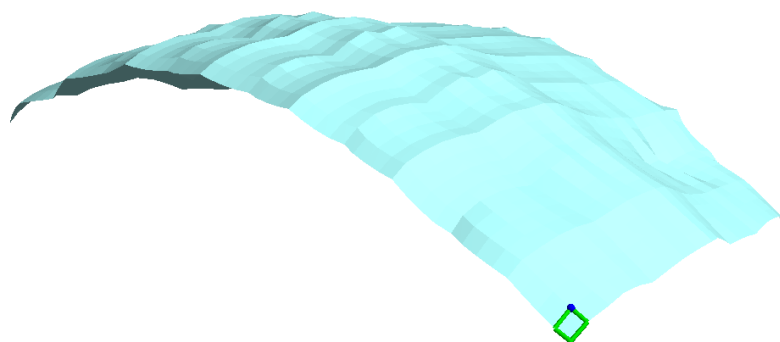
1а - расчет для полной формы, верхняя поверхность,  
 1б - расчет для полной формы, нижняя поверхность  
 2а - расчет со снесением граничного условия, верхняя поверхность,  
 2б - расчет со снесением граничного условия, нижняя поверхность

Р и с у н о к 16 – Распределение перепада коэффициента давления в сечении №2. Расчет для исходной формы купола

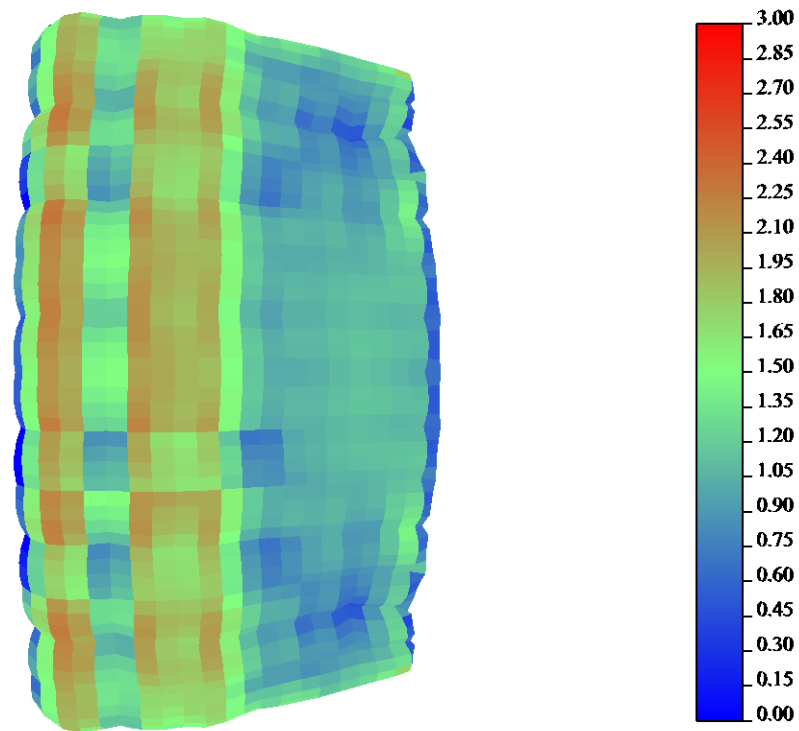
На рисунках 17 - 25 приведены аналогичные данные для расчета обтекания наполненной формы купола парашюта. На рисунке 17 - 18 приведены форма парашюта и срединной поверхности, а на рисунках 19 - 22 распределения перепада коэффициента давления по верхней и нижней поверхностям купола парашюта. На рисунках 24 - 25 приведены графики распределения перепада коэффициента давления по верхней и нижней поверхностям в двух сечениях купола, расположение которых показано на рис. 23. При этом отметим, что сечение №1 бралось по плоскости симметрии парашюта и попадает на впадину верхней поверхности. Сечение №2 бралось примерно на середине одной из половин крыла и при этом попадает на выпуклость верхней поверхности и впадину нижней поверхности.



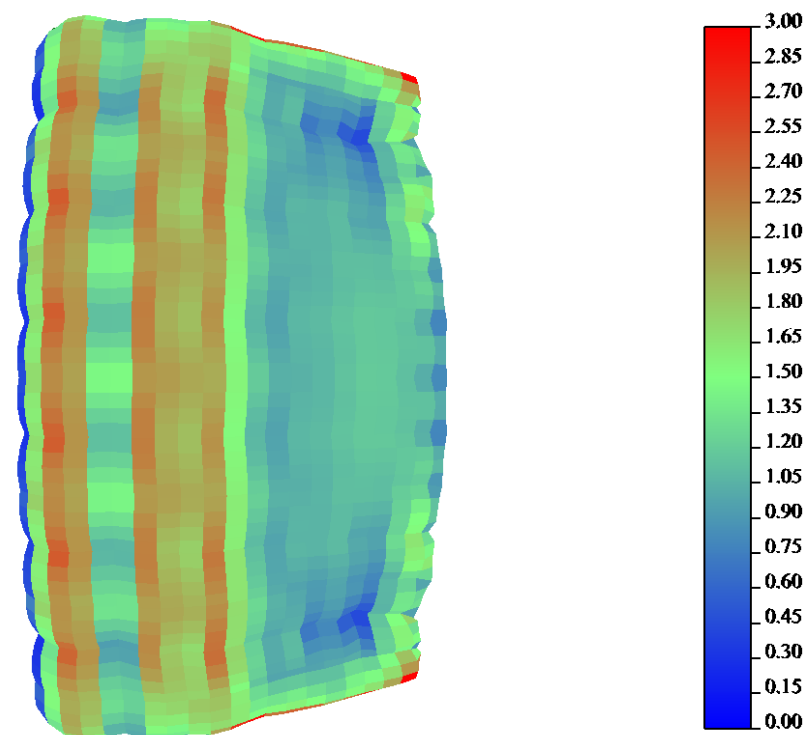
Р и с у н о к 17 – Конфигурация наполненной модели парашюта



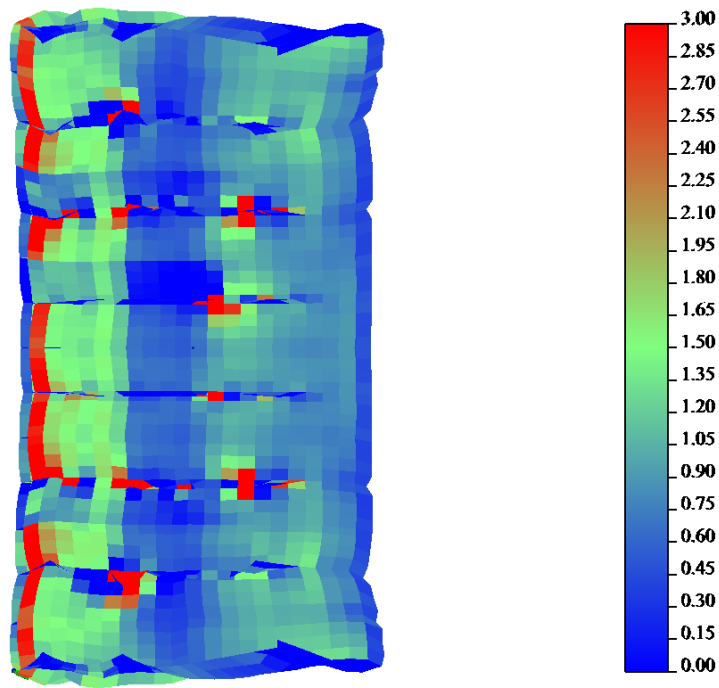
Р и с у н о к 18 – Конфигурация срединной поверхности для наполненной формы купола парашюта



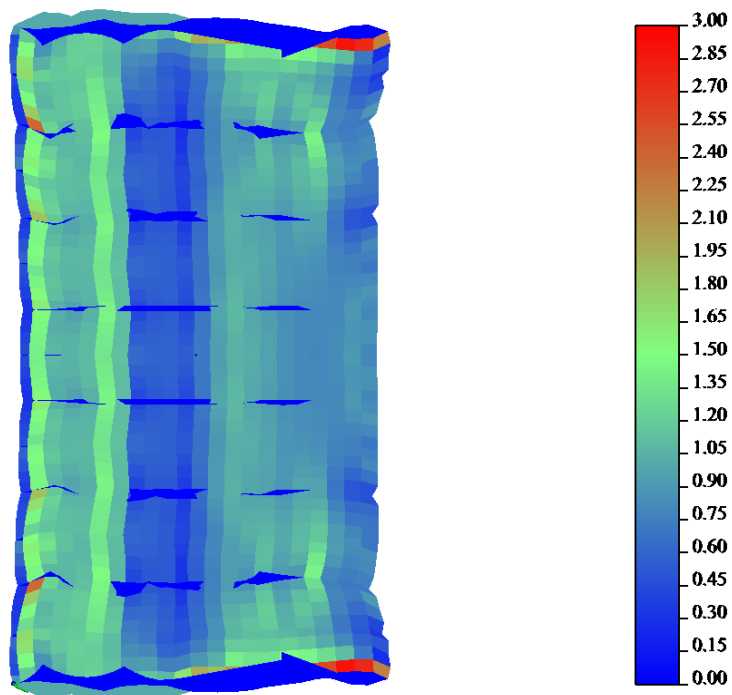
Р и с у н о к 19 – Распределение перепада коэффициента давления по верхней поверхности купола парашюта. Расчет для наполненной формы в полной конфигурации



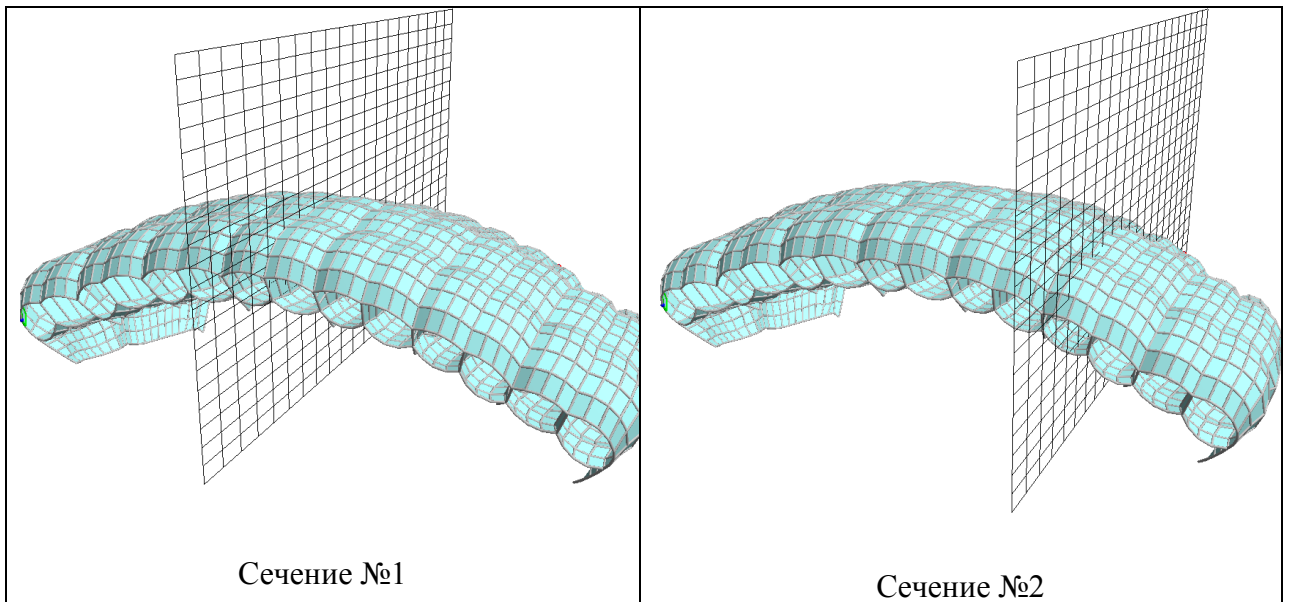
Р и с у н о к 20 – Распределение перепада коэффициента давления по верхней поверхности купола парашюта. Расчет для наполненной формы со снесением граничного условия на срединную поверхность



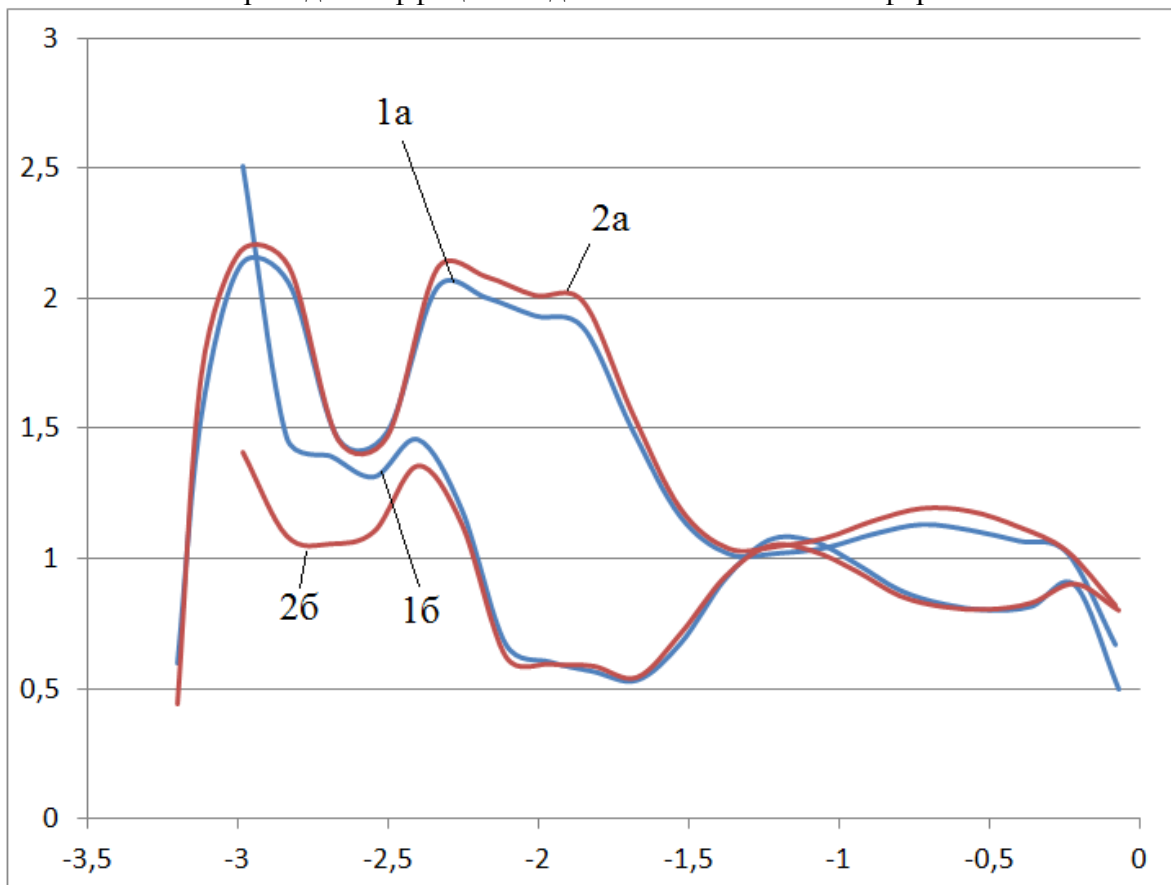
Р и с у н о к 21 – Распределение перепада коэффициента давления по нижней поверхности купола парашюта. Расчет для наполненной формы в полной конфигурации



Р и с у н о к 22 – Распределение перепада коэффициента давления по нижней поверхности купола парашюта. Расчет для наполненной формы со снесением граничного условия на срединную поверхность

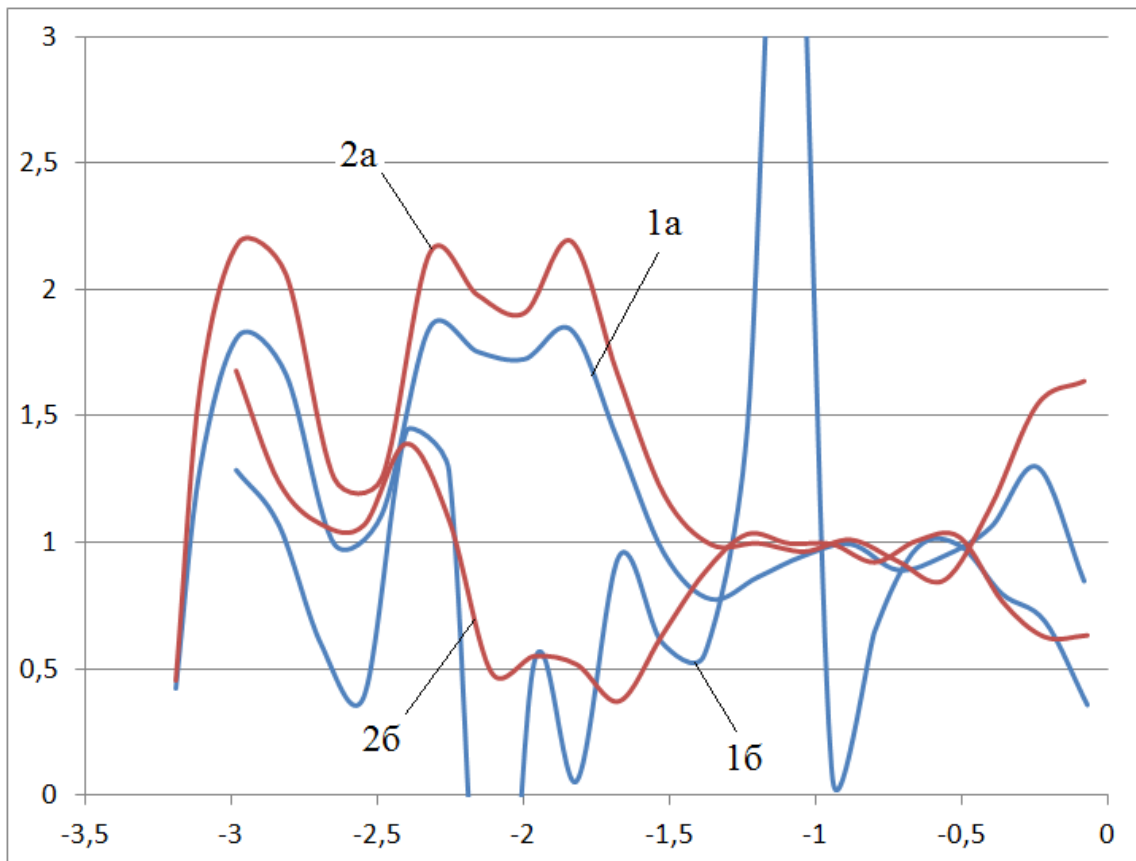


Р и с у н о к 23 – Расположение сечений, в которых строились графики распределения перепада коэффициента давления. Наполненная форма



1а - расчет для полной формы, верхняя поверхность,  
 1б - расчет для полной формы, нижняя поверхность  
 2а - расчет со снесением граничного условия, верхняя поверхность,  
 2б - расчет со снесением граничного условия, нижняя поверхность

Р и с у н о к 24 – Распределение перепада коэффициента давления в сечении №1. Расчет для исходной формы купола



1а - расчет для полной формы, верхняя поверхность,  
 1б - расчет для полной формы, нижняя поверхность  
 2а - расчет со снятием граничного условия, верхняя поверхность,  
 2б - расчет со снятием граничного условия, нижняя поверхность

Р и с у н о к 25 – Распределение перепада коэффициента давления в сечении №2. Расчет для исходной формы купола

В таблице 1 приведены значения коэффициентов силы сопротивления  $C_{xa}$  и коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$ .

Т а б л и ц а 1. Коэффициенты аэродинамических сил

Модель расчета	$C_{xa}$	$C_{ya}$	K
Полная поверхность	0,14	0,39	2,8
Со снятием граничного условия	0,15	0,42	2,8

Анализ приведенных результатов аэродинамических расчетов для парашюта ПО 9-7 позволяет заметить следующее:

- для исходной формы купола парашюта полученные распределения перепада коэффициента давления хорошо совпадают на верхней поверхности вблизи передней кромки и на средней части крыла. Есть локальное отличие распределения перепада коэффициента давления в узкой окрестности передней кромки. Кроме того, заметные отличия наблюдаются в задней части купола, как на верхней, так и на нижней поверхности. При этом в расчете для полной формы получена значительная разность перепада коэффициента давления, что отличается от классических распределений давления по поверхности профилей крыльев. Такое поведение представляется нефизичным. Его можно объяснить вырождением численного решения, вызванным малым углом раствора поверхности купола вблизи задней кромки;
- для наполненной формы хорошее совпадение разности перепада давления в срединном сечении №1, полученных для полной формы и по методу со снесением граничного условия. Это связано с тем, что расстояние между поверхностями увеличилось и расчет по полной модели стал более корректным;
- для наполненной формы при расчете полной конфигурации имеются нефизичные забросы перепада коэффициента давления на отдельных ячейках, что видно на рисунке 21 и на рисунке, где приведено распределение давления в сечении, проходящем через места крепления строп. Вблизи точек крепления строп происходит сильная деформация расчетной сетки, что сразу сказывается на расчете в полной конфигурации. При расчете со снесением граничного условия результаты более гладкие;
- суммарные нагрузки, полученные для наполненной формы по полной модели и модели со снесением граничного условия, близки (табл. 3)

## **8. Сравнение с экспериментальными данными.**

### **Тестирование разработанного математического метода на модели парашюта ПО-26.**

Целью работы, о которой рассказывается в данной главе, явились: построение геометрической модели планирующего парашюта ПО-26 по исходным чертежам, проведение расчетов аэродинамических нагрузок на данной модели с использованием модулей формообразования двумя методами: со снесением граничного условия на срединную поверхность и по двухоболочковой модели, сравнение результатов работы этих методов друг с другом и с экспериментальными данными, предоставленными ФГУП «НИИ Парашютостроения».

В ФГУП «НИИ Парашютостроения» имеется программный комплекс для задания математической модели конструкций парашютных систем. С помощью данного программного комплекса по имеющимся чертежам планирующего парашюта ПО-26 была создана его геометрическая модель (рис. 28).

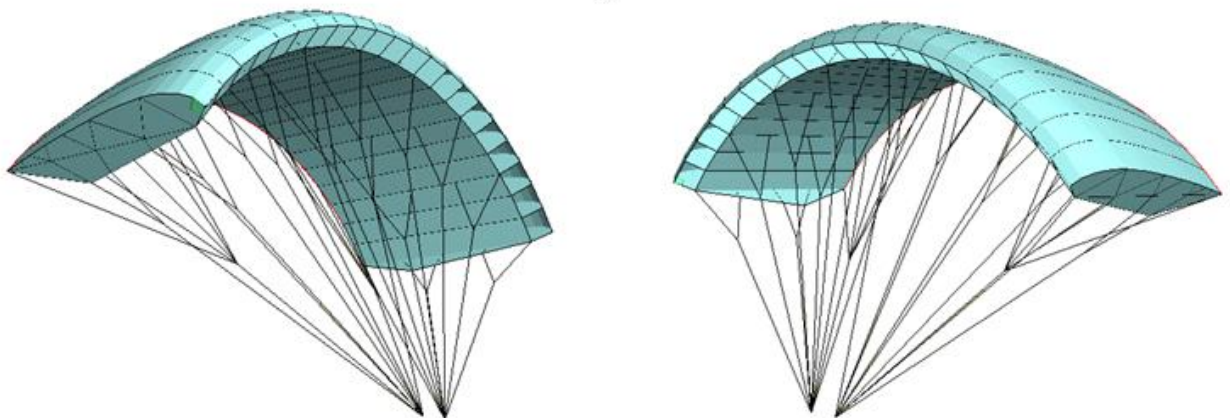
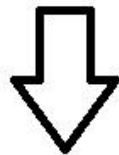
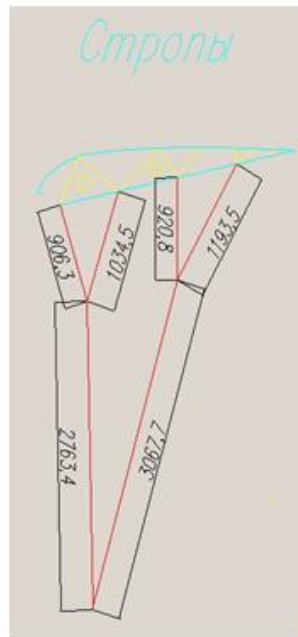
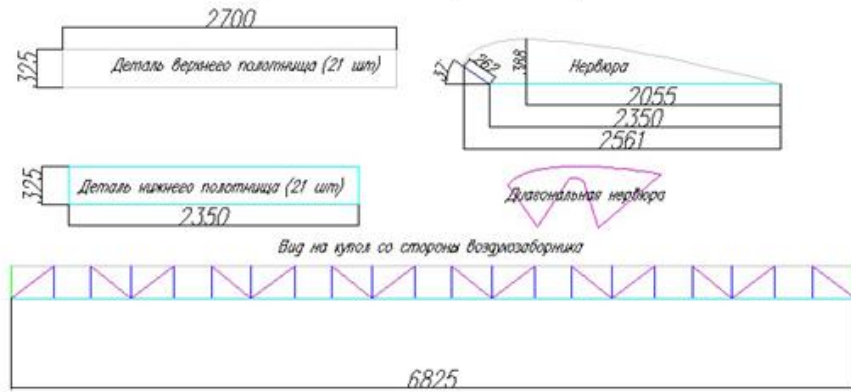
Во-первых, были созданы боковые нервюры, выбрано их разбиение в соответствии с исходными данными, задано общее количество нервюр. Также необходимо было учесть, что геометрическая модель обязана иметь три или более ячеек разбиения между нервюрами на верхней и нижней поверхностях, так как иначе данная геометрическая модель была бы непригодна для проведения расчета.

Во-вторых, необходимо было вычислить и внести в модель точки крепления парашютных строп (коуши) в соответствии с данными чертежа.

В-третьих, программой были заданы ленты усиления нервюр и арочность парашюта. Таким образом, мы получили геометрическую и упруго-массовую модель планирующего парашюта ПО-26.



# Геометрические размеры ПО-26

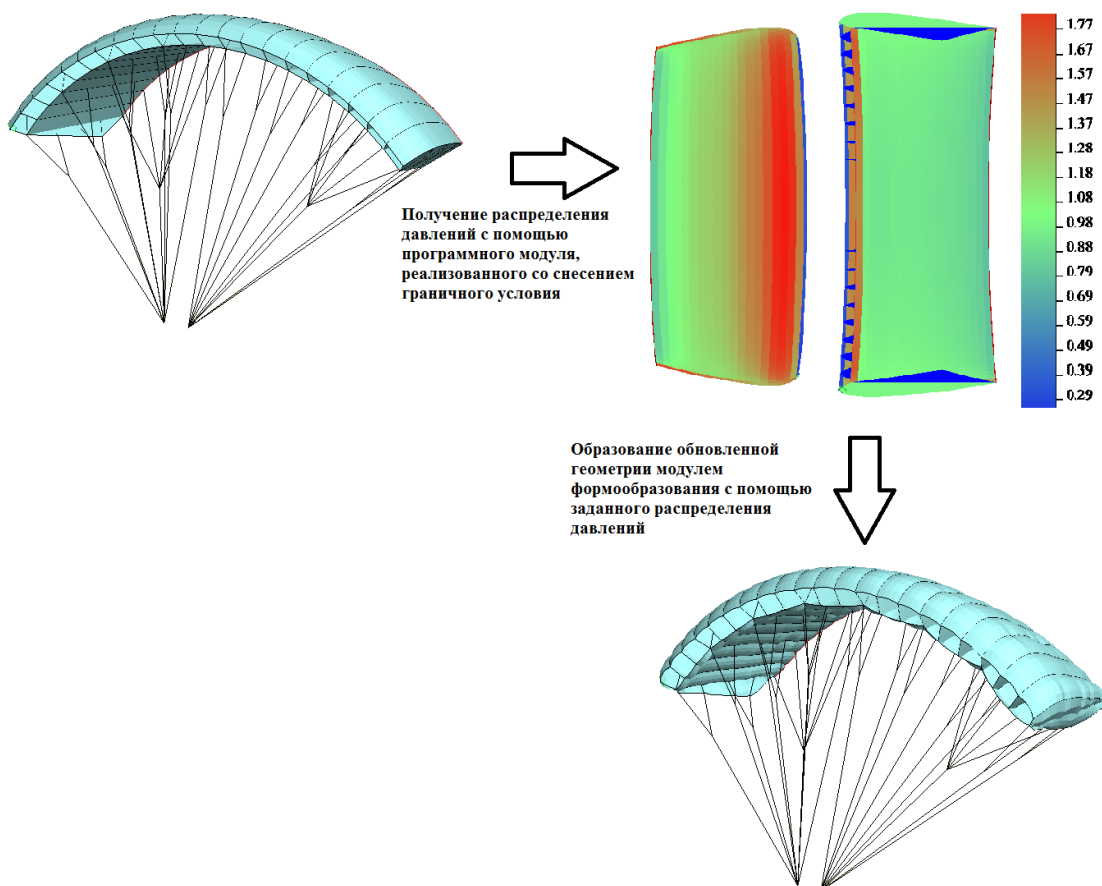


Р и с у н о к 26 – Построение геометрической модели

После создания геометрической модели необходимо было провести расчет по различным методикам с использованием модулей формообразования и аэроупругости. На первом шаге необходимо было придать геометрической модели определенную аэродинамическую форму.

Сначала было проведено наполнение разработанной геометрической модели купола парашюта со снесением граничного условия на срединную поверхность. Расчет обтекания исходной стационарной ненаполненной формы производился для потока, набегающего под углом атаки 0 градусов. Затем с помощью полученного перепада давления производился расчет новой формы купола, с использованием модулей формообразования и аэроупругости.

На рисунке 27 показано получение распределения перепада давления (показанного на цветной диаграмме) по исходной ненаполненной форме и формообразование новой геометрии по заданному перепаду.

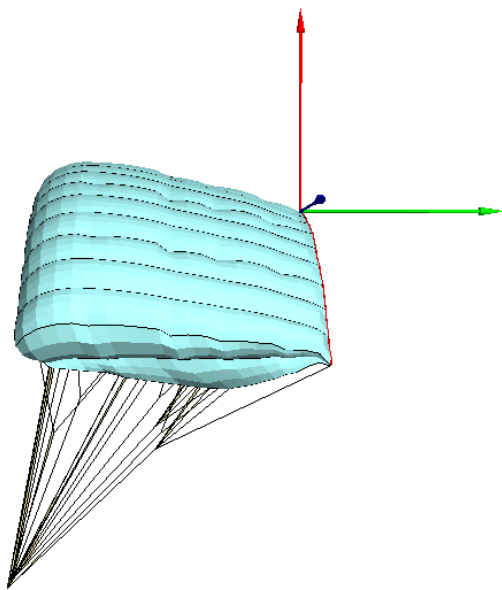


Р и с у н о к 27 – Предварительное наполнение

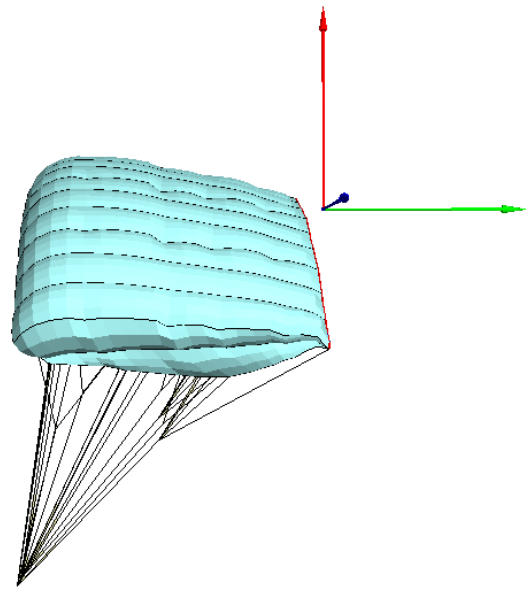
После предварительного наполнения геометрической формы был произведен расчет с балансировкой. Для расчета использовалась созданная программа, включающая в себя модули формообразования, аэроупругости и балансировки, а также модели: двухоболочковая и со снесением граничного условия. При этом для сравнения были проведены расчеты обтекания одной и той же конфигурации купола парашюта без снесения граничного условия и со снесением на срединную поверхность. Расчеты производились с малым изменением формы через определенное число итераций по времени, углом атаки в 0 градусов.

На рисунке 28 показан результат работы программы с использованием модулей формообразования и аэроупругости со снесением граничного условия на срединную поверхность. Работа по двухоболочковой модели приносит тот же результат (как на рисунке). Легко видеть, что парашют сместился от центра координат, из которого исходят оси. Стоит отметить, что в конечном положении, как на рисунке, он находится продолжительное количество итераций по времени. Это говорит нам о том, что парашютная система стабилизировалась и мы можем сравнить подъемную силу и сопротивление, а также связанное с ними понятие аэродинамического качества нашей математической модели с экспериментальными данными.

Начальное положение геометрии ПО-26



Положение геометрии после проведения расчета

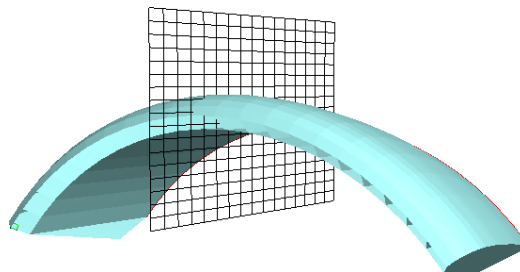


Р и с у н о к 28 – Изменение положения ПО-26 после расчета

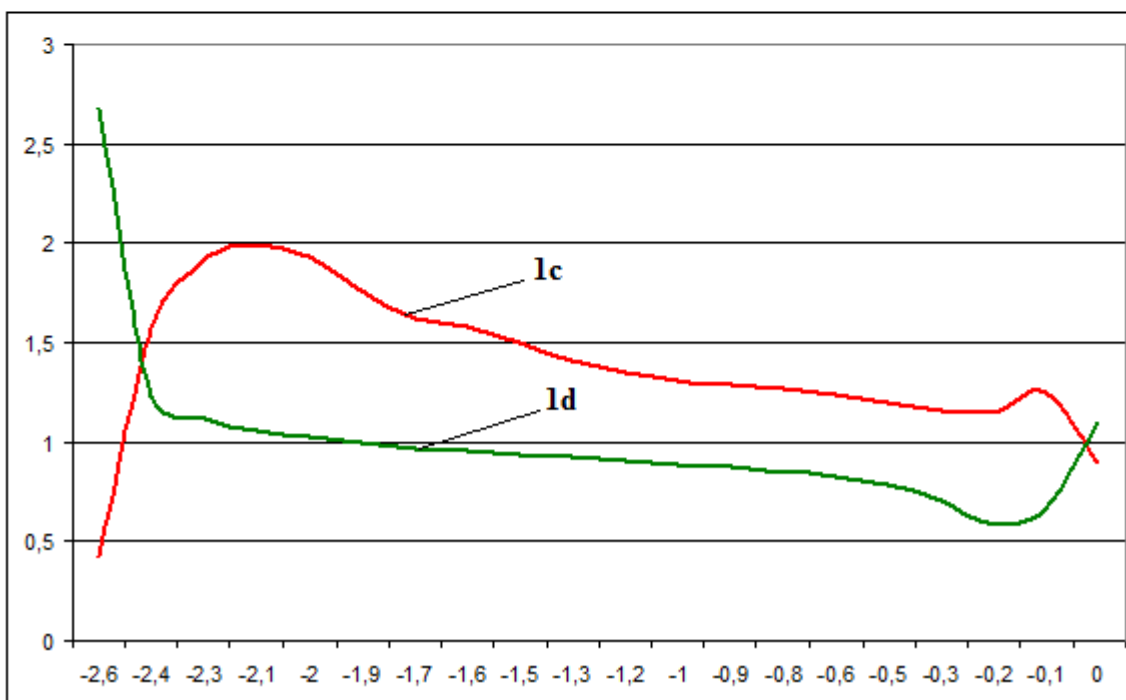
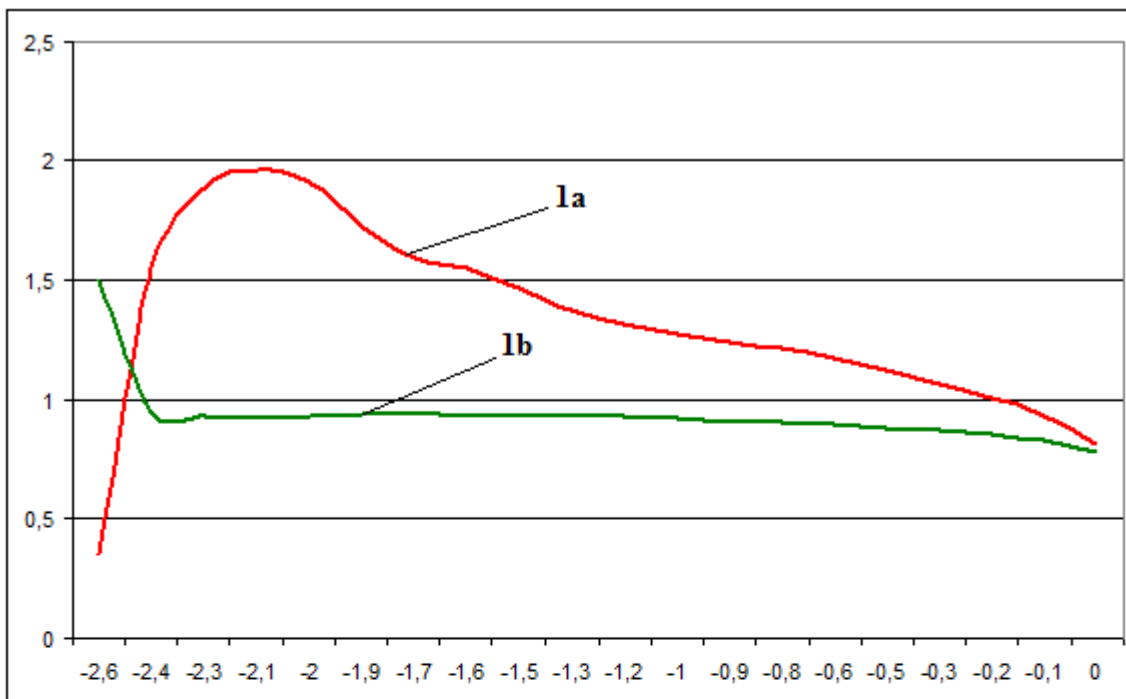
В таблице 2 показаны результаты расчетов программы по различным моделям. Также представлены экспериментальные данные, полученные при продувке планирующего парашюта ПО-26 в аэродинамической трубе.

Т а б л и ц а 2. Коэффициенты аэродинамических сил

Модель расчета	$C_x$	$C_y$	$K$
Со снесением граничного условия	0.167	0.414	2.48
Эксперимент (ЦАГИ)	0.18	0.45	2.5



Р и с у н о к 29 Срединное сечение незаполненной геометрии ПО-26



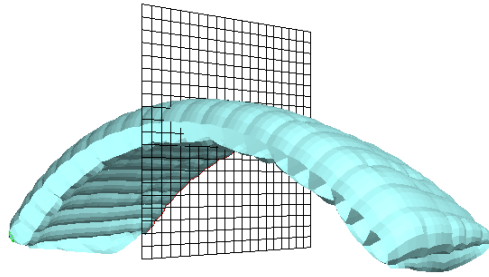
1a – Перепад давления на верхней поверхности купола, полученный методом снесения

1b – Перепад давления на нижней поверхности купола, полученный методом снесения

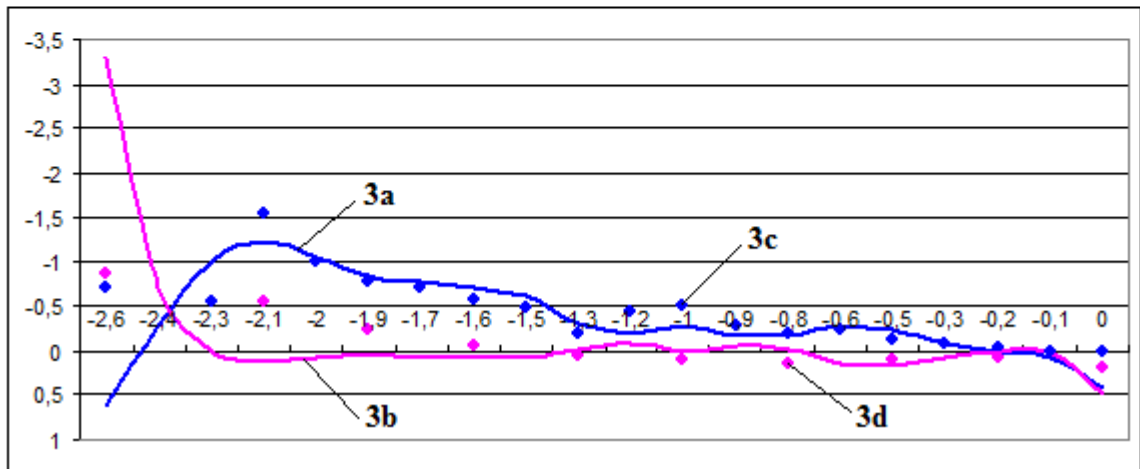
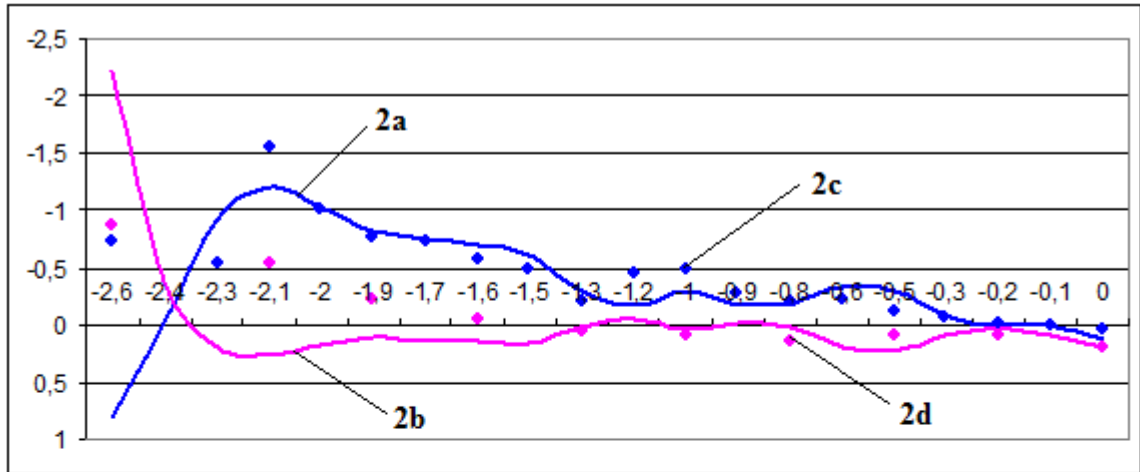
1c – Перепад давления на верхней поверхности купола, полученный методом обтекания  
двухоболочковой модели

1d – Перепад давления на нижней поверхности купола, полученный методом обтекания  
двухоболочковой модели

Р и с у н о к 30 Перепад давления в срединном сечении незаполненной геометрии



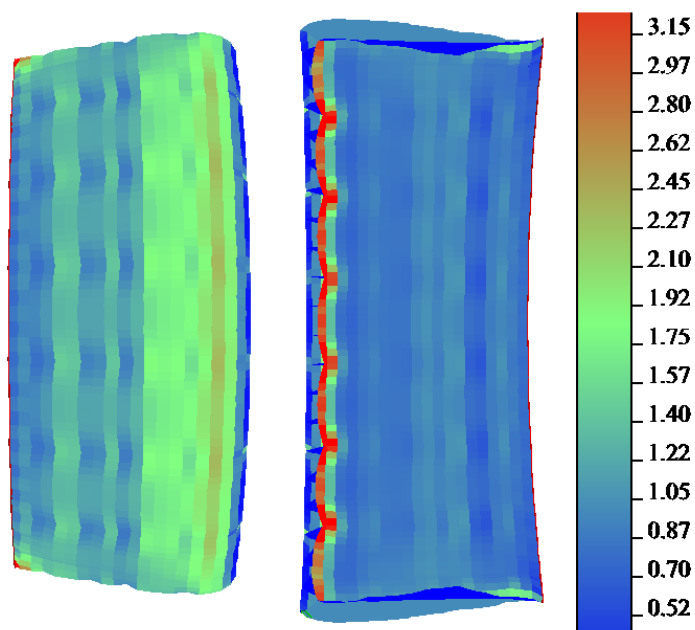
Р и с у н о к 31 – Срединное сечение заполненной геометрии ПО-26



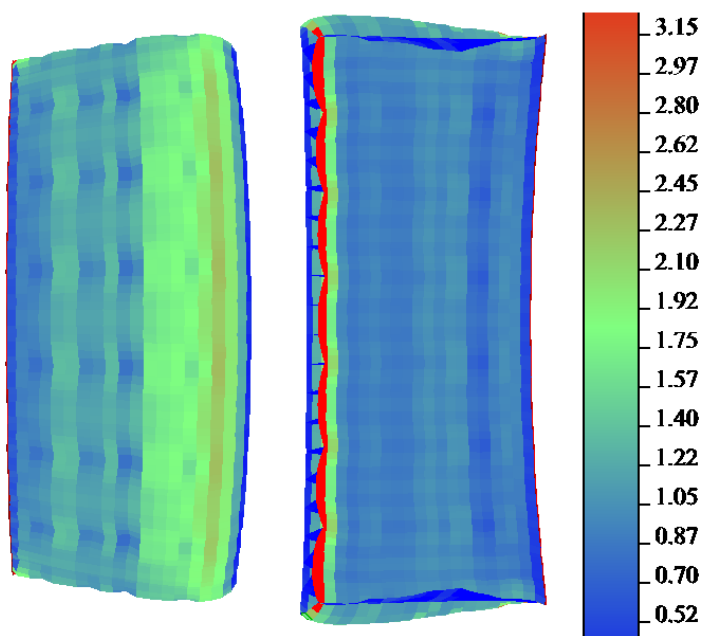
- 2a - Перепад давления на верхней поверхности наполненного купола, полученный методом снесения граничного условия на срединную поверхность
- 2b – Перепад давления на нижней поверхности наполненного купола, полученный методом снесения граничного условия на срединную поверхность
- 2c, 3c – Значение перепада давления на верхней поверхности купола в эксперименте
- 2d, 3d – Значение перепада давления на нижней поверхности купола в эксперименте
- 3a - Перепад давления на верхней поверхности наполненного купола, полученный методом обтекания двухоболочковой модели

3б – Перепад давления на нижней поверхности наполненного купола, , полученный методом обтекания двухоболочковой модели

Р и с у н о к 32 – Перепад давлений в срединном сечении заполненной геометрии



Р и с у н о к 33 – Цветовая диаграмма распределения перепада давления, полученного методом снесения граничного условия



Р и с у н о к 34 – Цветовая диаграмма распределения перепада давления, полученного методом обтекания двухоболочковой модели

Анализ этих результатов опять позволяет заметить, что при расчете обтекания исходной формы купола парашюта полученные распределения давления по полной модели и модели со снесением граничного условия сильно отличаются в окрестности задней кромки.

При расчете обтекания наполненной формы обе математические модели дают близкие результаты. при этом распределение давления в задней части купола парашюта согласуется с экспериментальным.

Также обратим внимание на хорошее совпадение суммарных аэродинамических характеристик, полученных в расчете со снесением граничного условия с данными эксперимента (см. таблицу 2)

Одну из основных проблем при проектировании планирующих парашютов представляет подбор длин строп, обеспечивающих балансировку парашюта на оптимальном угле атаки. В связи с этим, был проведен численный эксперимент, чтобы выявить зависимость роста аэродинамического качества от угла атаки, под которым обтекается парашют. Стоит отметить, что наибольшее аэродинамическое качество парашют приобретает при угле атаки в 8 градусов. Следовательно, для улучшения летных характеристик парашюта нужна стропная система, которая будет стабилизировать данный парашют ПО-26 под углом, отличным на 8 градусов по отношению к обеспечиваемому реально существующей конструкцией.

Т а б л и ц а 3. Коэффициенты аэродинамических сил в зависимости от угла атаки

Угол атаки, градусы	$C_x$	$C_y$	$K$
0	0.158	0.530	3.35
2	0.162	0.633	3.9
4	0.191	0.737	3.85
6	0.189	0.838	4.43
8	0.209	0.936	4.47
10	0.237	1.032	4.35



## **Заключение.**

Таким образом, в выпускной квалификационной работе осуществлена разработка математической модели для расчета на ЭВМ аэродинамических нагрузок и формообразования планирующего парашюта панельным методом со снесением граничного условия на срединную поверхность.

В рамках существующего пакета программ для расчета на ЭВМ процессов обтекания и формообразования планирующего парашюта на основе вихревых методов, разработана версия, в которой применен метод снесения граничного условия на срединную поверхность.

Осуществлено тестирование разработанной математической модели, которое показало:

- при моделировании процесса формообразования метод снесения граничного условия на срединную поверхность позволяет получать более правильные распределения перепада давления, чем прямой метод расчета на полной форме купола парашюта, на начальной стадии наполнения купола, когда верхняя и нижняя поверхности находятся на малом расстоянии друг от друга.

- для наполненной формы купола парашюта распределения коэффициента давления, полученные по методу снесения граничного условия согласуются с распределениями, получаемыми по полной модели. При этом при расчете по полной модели имеются нефизичные локальные забросы перепада давления. При расчете по полной модели распределение перепада давления более гладкое.

- сравнение полученных в расчете аэродинамических характеристик парашюта ПО-26 с экспериментальными данными показало удовлетворительное совпадение с получаемых распределений перепада коэффициента давления по поверхности купола и хорошее совпадение суммарных сил.

- численное исследование зависимости аэродинамических характеристик парашюта ПО-26 от положения коуша показало возможность существенного улучшения его аэродинамических характеристик за счет изменения длин строп.

## Список использованной литературы.

1. Писарев И.В., Сетуха А.В. Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислительные методы и программирование, 2014, №15, с.109-120.
2. Гутников В.А. Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок. Изв. РАН МЖГ, 2006. №4. с. 78-92.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. – Изд-во Ленингр. Ун-та. – 1978. – 296 с.
4. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К, 2001, - 508с.
5. Рыжаков Г.В., Сетуха А.В. О сходимости численного метода решения некоторого гиперсингулярного интегрального уравнения на замкнутой поверхности. // Дифференциальные уравнения, 2010, том 46, № 9, с. 1343-1353
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.: Наука. 1995. – 520с
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1, изд. шестое. М.: Физматгиз, 1963. – 584 с.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987 (пер. с англ.). – 311 с.
9. Компьютерные технологии исследования аэродинамики и аэроупругости парашютов. Отчет ФГУП «НИИ парашютостроения» по НИР «Создание научного и конструкторского задела по перспективным парашютным системам». Шифр «Задел», тема 4-1202, 2012 г.
10. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978.

11. Апаринов В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками. – М: Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986, выпуск 1313.
12. Шипилов С.Д. Применение сингулярных интегральных уравнений второго рода к расчету давления на профиле умеренной толщины. // Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского. – 1986. – вып.1313. – с.476-487.
13. Lifanov I.K., Matveev A.F., Molyakov N.M. Flow around permeable and thick airfoils and numerical solution of singular integral equations. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1992. – V.4, №2, - p.109-144.
14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.: Наука. 1995. – 520с.
15. Гутников В.А, Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН МЖГ, 2006. №4. С. 78-92.
20. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987 (пер. с англ.). – 311 с.
21. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К,2001, - 508с.
22. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. – М: Высшая школа. 1971. – 632с.